Cálculo Diferencial e Integral - III

Exemplos de Resoluções

Semana 8 - 2 a 6 de Novembro de 2026

1. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$t + ye^{2ty} + \alpha te^{2ty}\frac{dy}{dt} = 0, \qquad y(1) = 0$$

em que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Determine o valor de α para o qual a equação é exacta. Para esse valor, resolva o problema e indique o intervalo máximo de solução.

Resolução: A equação, evidentemente não linear devido à presença da incógnita y na exponencial, pode ser escrita na forma

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0$$

com

$$M(t,y) = t + ye^{2ty}, \quad N(t,y) = \alpha te^{2ty}.$$

Por definição, a equação é exacta se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \Leftrightarrow e^{2ty} + 2tye^{2ty} = \alpha(e^{2ty} + 2tye^{2ty}),$$

o que implica que $\alpha = 1$. Neste caso, temos $N(t,y) = te^{2ty}$. Os potenciais para esta equação verificam

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = M(t,y), \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = N(t,y),$$

ou seja

$$\begin{aligned} \phi(t,y) &= \int M(t,y)dt = \frac{t^2}{2} + \frac{e^{2ty}}{2} + g(y) \\ \phi(t,y) &= \int N(t,y)dy = \frac{e^{2ty}}{2} + h(t). \end{aligned}$$

Comparando as duas expressões, vemos que os potenciais são da forma

$$\phi(t,y) = \frac{t^2}{2} + \frac{e^{2ty}}{2} + C,$$

para uma constante $C \in \mathbb{R}$. Assim, a solução geral da equação, na forma implícita, é

$$\frac{t^2}{2} + \frac{e^{2ty}}{2} + C = 0.$$

Com $t = 1$, $y = 0$, temos

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -1,$$

Logo, a solução do problema de valor inicial é

$$\frac{t^2}{2} + \frac{e^{2ty}}{2} = 1 \Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{2t}\log\left(2 - t^2\right).$$

Esta solução está definida para $t \neq 0$ e $2 - t^2 > 0$. O intervalo de definição (contendo $t = 1$) é portanto, $]0, \sqrt{2}[$.

2. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{2x}{y} - 4 - \left(\frac{4x}{y} + 2\right)\frac{dy}{dx} = 0 \quad , \quad y(1) = -5.$$

Verifique que a equação admite um factor de integração da forma $\mu(y)$, determine-o e resolva o problema, obtendo uma **expressão explícita** para a solução e indicando o seu intervalo máximo de definição.

Resolução: A equação admite um factor integrante da forma $\mu(y)$ se

$$\mu(y)\Big(\frac{2x}{y} - 4\Big) - \mu(y)\Big(\frac{4x}{y} + 2\Big)\frac{dy}{dx} = 0$$

for uma equação exacta, isto é, se

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(y)(\frac{2x}{y} - 4)\Big) = -\frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(y)(\frac{4x}{y} + 2)\Big) \quad \Leftrightarrow \quad \mu'(y)(\frac{2x}{y} - 4) - \mu(y)\frac{2x}{y^2} = -\mu(y)\frac{4}{y}$$

pelo que

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mu(y) = y.$$

Confirma-se a existência do factor integrante $\mu(y)$. Sendo

$$2x - 4y - (4x + 2y)\frac{dy}{dx} = 0$$

uma equação exacta, existe $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $\nabla\Phi = (2x - 4y, -4x - 2y)$ e as curvas de nível de $\Phi(x, y)$ definem implicitamente a solução geral da equação diferencial. Para calcular Φ, tem-se por um lado

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2x - 4y \quad \Leftrightarrow \quad \Phi = x^2 - 4xy + C(y)$$

e por outro lado

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -4x - 2y \quad \Leftrightarrow \quad -4x + C'(y) = -4x - 2y \quad \Leftrightarrow \quad C(y) = -y^2 + C \ , \ C \in \mathbb{R}$$

pelo que $\Phi(x, y) = x^2 - 4xy - y^2 + C$, e a solução geral da equação é definida por

$$x^2 - 4xy - y^2 = K \qquad , \qquad K \in \mathbb{R}$$

Pela condição inicial, $y(1) = -5$, conclui-se que $K = -4$, pelo que

$$x^2 - 4xy - y^2 = -4$$

define implicitamente a solução do PVI. Resolvendo em ordem a y, obtemos a expressão explícita pedida

$$y(x) = -2x - \sqrt{5x^2 + 4}.$$

O intervalo máximo de definição desta solução é evidentemente $x \in \mathbb{R}$.