Cálculo Diferencial e Integral - III

Exemplos de Resoluções

Semana 7 - 23 a 27 de Outubro de 2023

1. Determine todas as soluções de
$$\frac{dy}{dt} = (1+2t)y^4.$$

Resolução: Esta é, evidentemente, uma equação não linear separável.

Um solução óbvia é a função identicamente nula $y(t) = 0$, para todo o $t \in \mathbb{R}$.

Assumindo que $y(t) \neq 0$ na vizinhança de algum ponto t_0 do seu domínio, podemos dividir toda a equação por $y(t)$, para t nessa vizinhança, obtendo:

$$\frac{1}{y(t)^4}\frac{dy}{dt} = (1+2t).$$

Agora, o lado esquerdo da equação pode ser identificado com a derivada da função composta $\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{3y(t)^3}\right) = \frac{1}{y(t)^4}\frac{dy}{dt}$, pelo que

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{3y(t)^3}\right) = (1+2t),$$

e primitivando dos dois lados, obtém-se

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{3y(t)^3}\right) = (1+2t) \Rightarrow -\frac{1}{3y(t)^3} = \int (1+2t)dt + c$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{3y(t)^3} = t^2+t+c \Rightarrow y(t)^3 = \frac{1}{-3t^2-3t-3c} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{-3t^2-3t-3c}},$$

mas $-3c$, com $c \in \mathbb{R}$ uma constante arbitrária, é apenas outra constante arbitrária real, pelo que concluímos que
$$y(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{c-3t^2-3t}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Estas soluções nunca se anulam, pelo que concluímos que o conjunto das soluções da equação é formado pela solução identicamente nula e estas, para diferentes valores de $c \in \mathbb{R}$.

2. Obtenha explicitamente a solução do problema de Cauchy

$$y' - y^2 = 2t + 2ty^2 + 1, \qquad y(0) = 0.$$

Resolução: A equação é não linear. À primeira vista não aparenta ser separável, mas um simples rearranjo dos termos permite escrever

$$y' = y^2 + 2t + 2ty^2 + 1 \Leftrightarrow y' = (y^2 + 1) + 2t(y^2 + 1) \Leftrightarrow y' = (y^2 + 1)(2t + 1).$$

Agora, $y^2 + 1$ nunca se anula, pelo que podemos dividir a equação toda por este termo e obter a equação equivalente

$$\frac{1}{1 + y^2}\frac{dy}{dt} = (2t + 1),$$

cuja lado esquerdo é a derivada da composta $\frac{d}{dt}(\arctan y(t))$. Assim

$$\frac{d}{dt}(\arctan y(t)) = 1 + 2t,$$

e integrando dos dois lados, desde $t_0 = 0$ até t, para acertar imediatamente os dados iniciais

$$\int_{t_0=0}^{t} \frac{d}{d\tau}(\arctan y(\tau))d\tau = \int_{t_0=0}^{t} (1 + 2\tau)d\tau \Rightarrow \arctan y(t) - \arctan y(0) = t + t^2$$
$$\Rightarrow \arctan y(t) = \arctan y(0) + t + t^2 \Rightarrow y(t) = \tan(t + t^2).$$

A solução, única, do problema de valor inicial dado é, portanto $y(t) = \tan(t + t^2)$ e o seu intervalo máximo de definição é o intervalo de tempos t, contendo $t_0 = 0$, tais que $-\pi/2 < t + t^2 < \pi/2$. Mas $t + t^2$ é sempre maior ou igual a $-1/4$ (que é o seu mínimo, em $t = -1/2$), pelo que a condição $-\pi/2 < t + t^2$ é satisfeita para todo o t. Já $t + t^2 = \pi/2$ ocorre quando $t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2\pi}}{2}$, pelo que concluímos que o intervalo máximo de definição da solução é $]\frac{-1-\sqrt{1+2\pi}}{2}, \frac{-1+\sqrt{1+2\pi}}{2}[$.

3. Resolva o problema de valor inicial

$$(2x + e^x)\frac{dx}{dt} = t, \qquad x(0) = 1.$$

Resolução: A equação é não linear e já está escrita na forma separável. O lado esquerdo é a derivada da função composta $\frac{d}{dt}(x(t)^2 + e^{x(t)})$. Pelo que a equação é equivalente a

$$\frac{d}{dt}(x(t)^2 + e^{x(t)}) = t$$

e integrando dos dois lados, desde $t_0 = 0$ até t obtemos

$$\int_{t_0=0}^{t} \frac{d}{d\tau}(x(\tau)^2 + e^{x(\tau)})d\tau = \int_{t_0=0}^{t} \tau d\tau \Rightarrow x(t)^2 + e^{x(t)} - x(0)^2 - e^{x(0)} = t^2/2$$
$$\Rightarrow x(t)^2 + e^{x(t)} = x(0)^2 + e^{x(0)} + t^2/2 \Rightarrow x(t)^2 + e^{x(t)} = 1 + e + t^2/2.$$

Mas, neste momento, chegamos a um ponto em que a equação $x^2 + e^x = 1 + e + t^2/2$ não é possível de ser resolvida de forma explícita em ordem a x para se obter a forma exacta de $x(t)$. O melhor que se consegue, neste caso, é apelar ao teorema da função implícita o qual garante que, por ser $2x + e^x \neq 0$ em $x(0) = 1$, podemos concluir que na vizinhança desta condição inicial, ou seja, de $(t_0, x_0) = (0, 1)$ a equação implícita

$$x^2 + e^x = 1 + e + t^2/2$$

define, de forma única, uma solução (infinitamente) diferenciável $x(t)$ que satisfaz a condição inicial, com um tempo de existência numa vizinhança de $t_0 = 0$.

4. Determine explicitamente a solução do seguinte problema de valor inicial, indicando o intervalo máximo de definição da solução:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} - \frac{t}{y}; \qquad y(1) = 1.$$

Sugestão: Faça a substituição $v = \frac{y}{t}$.

Resolução: Seguindo a sugestão, faz-se a substituição $y(t) = t\,v(t)$. Então $y'(t) = v(t) + tv'(t)$. Donde a equação passa a escrever-se, para a nova incógnita $v(t)$, como

$$\begin{aligned} v + tv' &= v - \frac{1}{v} \\ \Leftrightarrow tv' &= -\frac{1}{v} \\ \Leftrightarrow vv' &= -\frac{1}{t}, \end{aligned}$$

ou seja, obtivemos uma equação separável na qual o lado esquerdo pode ser visto como a derivada, em ordem a t, de $v^2/2$,

$$\frac{d}{dt}\frac{v(t)^2}{2} = -\frac{1}{t}.$$

Para integrá-la e obter a solução $v(t)$ usaremos desde já a condição inicial. Em termos da nova função v ela escreve-se $v(1) = \frac{y(1)}{1} = 1$, pelo que a integração da equação separável se faz:

$$\begin{aligned}\int_1^t \frac{d}{ds}\frac{v(s)^2}{2}\,ds &= \int_1^t -\frac{1}{s}\,ds \\ \Leftrightarrow \frac{v(t)^2}{2} - \frac{v(1)^2}{2} &= \log 1 - \log t \\ \Leftrightarrow \frac{v(t)^2}{2} &= \frac{1}{2} - \log t \\ \Leftrightarrow v(t)^2 &= 1 - \log(t^2).\end{aligned}$$

Para obter a expressão *explícita* para $v(t)$ há que resolver esta equação. Duas funções se obtêm: $\pm\sqrt{1-\log(t^2)}$. Mas como a condição inicial, em $t=1$, corresponde a uma solução $v(1)=1$ com valor positivo, destas duas funções $v(t)$ só poderá ser a que tem sinal positivo, pelo que

$$v(t) = \sqrt{1-\log(t^2)}.$$

Finalmente, há que desfazer a substituição inicial para obter explícitamente a solução $y(t)$ que procuramos, ou seja

$$y(t) = tv(t) = t\sqrt{1-\log(t^2)}.$$

O intervalo máximo de definição é obtido procurando o maior intervalo aberto que contém o instante inicial $t=1$ e onde a função é continuamente diferenciável, o que, no nosso caso, é dado pelas restrições $t \neq 0$ e $1-\log(t^2) > 0$. Assim,

$$\begin{aligned}\log(t^2) &< 1 \\ \Leftrightarrow t^2 &< e \quad (t \neq 0),\end{aligned}$$

e concluimos finalmente que o intervalo máximo de definição desta solução é $]0, \sqrt{e}[$.

5. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$t + ye^{2ty} + \alpha t e^{2ty}\frac{dy}{dt} = 0, \qquad y(1) = 0$$

em que $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Determine o valor de α para o qual a equação é exacta. Para esse valor, resolva o problema e indique o intervalo máximo de solução.

Resolução: A equação, evidentemente não linear devido à presença da incógnita y na exponencial, pode ser escrita na forma

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0$$

com

$$M(t,y) = t + ye^{2ty}, \quad N(t,y) = \alpha t e^{2ty}.$$

Por definição, a equação é exacta se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \Leftrightarrow e^{2ty} + 2tye^{2ty} = \alpha(e^{2ty} + 2tye^{2ty}),$$

o que implica que $\alpha = 1$. Neste caso, temos $N(t, y) = te^{2ty}$. Os potenciais para esta equação verificam

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = M(t, y), \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = N(t, y),$$

ou seja

$$\begin{aligned} \phi(t, y) &= \int M(t, y)dt = \frac{t^2}{2} + \frac{e^{2ty}}{2} + g(y) \\ \phi(t, y) &= \int N(t, y)dy = \frac{e^{2ty}}{2} + h(t). \end{aligned}$$

Comparando as duas expressões, vemos que os potenciais são da forma

$$\phi(t, y) = \frac{t^2}{2} + \frac{e^{2ty}}{2} + C,$$

para uma constante $C \in \mathbb{R}$. Assim, a solução geral da equação, na forma implícita, é

$$\frac{t^2}{2} + \frac{e^{2ty}}{2} + C = 0.$$

Com $t = 1$, $y = 0$, temos

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -1,$$

Logo, a solução do problema de valor inicial é

$$\frac{t^2}{2} + \frac{e^{2ty}}{2} = 1 \Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{2t}\log\left(2 - t^2\right).$$

Esta solução está definida para $t \neq 0$ e $2 - t^2 > 0$. O intervalo de definição (contendo $t = 1$) é portanto, $]0, \sqrt{2}[$.

6. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{2x}{y} - 4 - \left(\frac{4x}{y} + 2\right)\frac{dy}{dx} = 0 \quad , \quad y(1) = -5.$$

Verifique que a equação admite um factor de integração da forma $\mu(y)$, determine-o e resolva o problema, obtendo uma **expressão explícita** para a solução e indicando o seu intervalo máximo de definição.

Resolução: A equação admite um factor integrante da forma $\mu(y)$ se

$$\mu(y)\Big(\frac{2x}{y}-4\Big)-\mu(y)\Big(\frac{4x}{y}+2\Big)\frac{dy}{dx}=0$$

for uma equação exacta, isto é, se

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(y)(\frac{2x}{y}-4)\Big)=-\frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(y)(\frac{4x}{y}+2)\Big) \quad\Leftrightarrow\quad \mu'(y)(\frac{2x}{y}-4)-\mu(y)\frac{2x}{y^2}=-\mu(y)\frac{4}{y}$$

pelo que

$$\frac{\mu'}{\mu}=\frac{1}{y} \quad\Leftrightarrow\quad \mu(y)=y.$$

Confirma-se a existência do factor integrante $\mu(y)$. Sendo

$$2x-4y-(4x+2y)\frac{dy}{dx}=0$$

uma equação exacta, existe $\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, tal que $\nabla\Phi=(2x-4y,-4x-2y)$ e as curvas de nível de $\Phi(x,y)$ definem implicitamente a solução geral da equação diferencial. Para calcular Φ, tem-se por um lado

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=2x-4y \quad\Leftrightarrow\quad \Phi=x^2-4xy+C(y)$$

e por outro lado

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-4x-2y \quad\Leftrightarrow\quad -4x+C'(y)=-4x-2y \quad\Leftrightarrow\quad C(y)=-y^2+C \;\;,\;\; C\in\mathbb{R}$$

pelo que $\Phi(x,y)=x^2-4xy-y^2+C$, e a solução geral da equação é definida por

$$x^2-4xy-y^2=K \qquad , \qquad K\in\mathbb{R}$$

Pela condição inicial, $y(1)=-5$, conclui-se que $K=-4$, pelo que

$$x^2-4xy-y^2=-4$$

define implicitamente a solução do PVI. Resolvendo em ordem a y, obtemos a expressão explícita pedida

$$y(x)=-2x-\sqrt{5x^2+4}.$$

O intervalo máximo de definição desta solução é evidentemente $x\in\mathbb{R}$.