Cálculo Diferencial e Integral - III

Exemplos de Resoluções

Semana 6 - 16 a 20 de Outubro de 2023

1. Determine a solução geral das equações diferenciais ordinárias

   (a) $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{1}{1+t^2}x = 0.$

   (b) $\dfrac{dy}{dx} + y\sqrt{x}\,\operatorname{sen} x = 0.$

Resolução:

(a) Poderíamos simplesmente aplicar diretamente a fórmula da solução. Mas vamos resolver o problema usando os passos que levam a essa fórmula.

Começamos por observar que $x(t) = 0$ é solução (a equação é linear e homogénea). Supondo então que existe uma solução não nula, existe então necessariamente, por continuidade, um subintervalo aberto do seu domínio onde $x(t) \neq 0$ em todo esse subintervalo. Podemos então, assumindo que $x(t)$ satisfaz a EDO dada, dividir toda a equação por $x(t)$, para t nesse intervalo onde a solução não se anula,

$$\frac{1}{x(t)}\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{1+t^2}.$$

Do lado esquerdo da equação podemos reconhecer agora a derivada em ordem a t de $\log|x(t)|$, pelo que

$$\frac{d}{dt}\left(\log|x(t)|\right) = -\frac{1}{1+t^2},$$

donde, por primitivação, se obtém

$$\log|x(t)| = \arctan(t) + c,$$

com $c \in \mathbb{R}$ uma constante arbitrária de primitivação. Exponenciando a equação dos dois lados obtém-se agora

$$|x(t)| = e^c e^{\arctan(t)} = Ke^{\arctan(t)},$$

em que $K = e^c$ é agora uma constante arbitrária positiva (resultante de e^c, com $c \in \mathbb{R}$ arbitrária). Finalmente, tendo em conta que $x(t)$ é contínua, e não nula no intervalo em questão, então não poderá mudar de sinal, pelo que só poderá ser

$$x(t) = \pm Ke^{\arctan(t)}.$$

Conclui-se também, por continuidade, que se a solução $x(t)$ é não nula nalgum ponto, será necessariamente não nula numa vizinhança desse ponto, e portanto dada por esta fórmula nessa vizinhança. Mas então, será dada também por esta fórmula em todo o $t \in \mathbb{R}$, porque não é possível tal solução se anular ou alternar de sinal, sem perder a continuidade.

Tem-se assim, por fim, que as possíveis soluções da equação linear homogénea são $x(t) = 0$, $x(t) = Ke^{\arctan(t)}$ ou $x(t) = -Ke^{\arctan(t)}$, para todo o $t \in \mathbb{R}$, com K uma constante positiva. Mas estas três possibilidade resumem-se numa só fórmula

$$x(t) = Ce^{\arctan(t)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(b) Desta vez usaremos diretamente a fórmula da solução

$$y(x) = Ce^{\int \sqrt{x} \operatorname{sen} x \, dx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

A solução está assim determinada e não pode ser mais simplificada, dado que não é possível escrever a primitiva da função $\sqrt{x} \operatorname{sen} x$ de forma explícita usando funções elementares (atenção que, sendo uma função contínua em $]0, +\infty[$, a sua primitiva existe neste intervalo, só não é possível escrevê-la de forma explícita usando funções elementares como polinómios, trigonométrica, exponenciais, ou compostas e combinações delas e das suas inversas).

2. Obtenha a solução do problema de valor inicial

$$(1 + t^2)\frac{dx}{dt} + 4tx = t, \quad x(1) = -2.$$

Resolução: Começamos por dividir toda a equação pelo coeficiente não nulo $(1 + t^2)$,

$$\frac{dx}{dt} + \frac{4t}{(1 + t^2)}x(t) = \frac{t}{(1 + t^2)}.$$

Observa-se assim que se trata duma equação diferencial ordinária não homogénea. O fator integrante que transforma o lado esquerdo da equação na derivada dum produto é dado por

$$\mu(t) = e^{\int \frac{4t}{(1+t^2)} dt} = e^{2 \log(1+t^2)} = (1 + t^2)^2.$$

Portanto, multiplicando toda a equação por $\mu(t)$ obtemos:

$$(1 + t^2)^2 \frac{dx}{dt} + 4t(1 + t^2)x(t) = t(1 + t^2) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}[(1 + t^2)^2 x(t)] = t(1 + t^2).$$

Neste ponto, como temos um problema de valor inicial, iremos integrar a partir de $t_0 = 1$ para incorporar imediatamente o valor da condição inicial $x(t_0)$, em vez de fazer primitivação genérica, que seria o caso se nos tivessem pedido todas as possíveis soluções.

Assim, integrando os dois lados da equação

$$\begin{aligned}
\int_{t_0=1}^{t} \frac{d}{ds}[(1+s^2)^2 x(s)]ds &= \int_{t_0=1}^{t} s(1+s^2)ds \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (1+t^2)^2 x(t) - (1+1^2)^2 x(1) &= \frac{(1+s^2)}{2}\Big|_{t_0=1}^{t} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (1+t^2)^2 x(t) &= -2^3 + \frac{(1+t^2)}{2} - \frac{(1+1^2)}{2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow x(t) &= \frac{1}{2(1+t^2)} - \frac{9}{(1+t^2)^2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow x(t) &= \frac{t^2-17}{2(1+t^2)^2},
\end{aligned}$$

que é a solução, única, do problema.

3. Qual a solução geral da equação

$$y^2 y' = 2e^{-t^3} y^2 - 3t^2 y^3.$$

Resolução: Trata-se, aparentemente, de uma equação diferencial ordinária não linear, devido à presença dos termos y^2 e y^3. Mas rapidamente se percebe que, dividindo por $y(t)^2$, ela se reduz a uma equação linear não homogénea. Assim, começamos por distinguir o caso $y(t) = 0$, que é solução identicamente nula desta equação não linear, das restantes $y(t) \neq 0$. Nesta última situação podemos dividir toda a equação por $y(t)$ obtendo

$$y'(t) + 3t^2 y(t) = 2e^{-t^3}.$$

A partir daqui seguimos o procedimento habitual para a resolução geral de EDOs lineares não homogéneas, começando pela determinação de um fator integrante que transforme o lado esquerdo da equação na derivada dum produto

$$\mu(t) = e^{\int 3t^2\,dt} = e^{t^3}.$$

Multiplicando toda a equação por $\mu(t)$ obtém-se

$$e^{t^3} y'(t) + 3t^2 e^{t^3} y(t) = 2 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}[e^{t^3} y(t)] = 2$$

e primitivando arbitrariamente, para a obtenção de todas as possíveis soluções, chega-se a

$$e^{t^3} y(t) = 2t + c \Leftrightarrow y(t) = (2t+c)e^{-t^3}.$$

A solução geral da EDO dada é assim, ou $y(t) = 0$, ou no caso de solução não identicamente nula, $y(t) = (2t+c)e^{-t^3}$ com $c \in \mathbb{R}$.

4. Determine todas as soluções de

$$\frac{dy}{dt} = (1+2t)y^4.$$

Resolução: Esta é, evidentemente, uma equação não linear separável.

Um solução óbvia é a função identicamente nula $y(t) = 0$, para todo o $t \in \mathbb{R}$.

Assumindo que $y(t) \neq 0$ na vizinhança de algum ponto t_0 do seu domínio, podemos dividir toda a equação por $y(t)$, para t nessa vizinhança, obtendo:

$$\frac{1}{y(t)^4}\frac{dy}{dt} = (1+2t).$$

Agora, o lado esquerdo da equação pode ser identificado com a derivada da função composta $\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{3y(t)^3}\right) = \frac{1}{y(t)^4}\frac{dy}{dt}$, pelo que

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{3y(t)^3}\right) = (1+2t),$$

e primitivando dos dois lados, obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{3y(t)^3}\right) = (1+2t) \Rightarrow -\frac{1}{3y(t)^3} = \int (1+2t)dt + c \\ \Rightarrow -\frac{1}{3y(t)^3} = t^2+t+c \Rightarrow y(t)^3 = \frac{1}{-3t^2-3t-3c} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{-3t^2-3t-3c}},\end{aligned}$$

mas $-3c$, com $c \in \mathbb{R}$ uma constante arbitrária, é apenas outra constante arbitrária real, pelo que concluímos que

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{c-3t^2-3t}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Estas soluções nunca se anulam, pelo que concluímos que o conjunto das soluções da equação é formado pela solução identicamente nula e estas, para diferentes valores de $c \in \mathbb{R}$.

5. Obtenha explicitamente a solução do problema de Cauchy

$$y' - y^2 = 2t + 2ty^2 + 1, \qquad y(0) = 0.$$

Resolução: A equação é não linear. À primeira vista não aparenta ser separável, mas um simples rearranjo dos termos permite escrever

$$y' = y^2 + 2t + 2ty^2 + 1 \Leftrightarrow y' = (y^2+1) + 2t(y^2+1) \Leftrightarrow y' = (y^2+1)(2t+1).$$

Agora, y^2+1 nunca se anula, pelo que podemos dividir a equação toda por este termo e obter a equação equivalente

$$\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dt} = (2t+1),$$

cuja lado esquerdo é a derivada da composta $\frac{d}{dt}(\arctan y(t))$. Assim

$$\frac{d}{dt}(\arctan y(t)) = 1 + 2t,$$

e integrando dos dois lados, desde $t_0 = 0$ até t, para acertar imediatamente os dados iniciais

$$\int_{t_0=0}^{t} \frac{d}{d\tau}(\arctan y(\tau))d\tau = \int_{t_0=0}^{t}(1+2\tau)d\tau \Rightarrow \arctan y(t) - \arctan y(0) = t + t^2$$
$$\Rightarrow \arctan y(t) = \arctan y(0) + t + t^2 \Rightarrow y(t) = \tan(t+t^2).$$

A solução, única, do problema de valor inicial dado é, portanto $y(t) = \tan(t+t^2)$ e o seu intervalo máximo de definição é o intervalo de tempos t, contendo $t_0 = 0$, tais que $-\pi/2 < t+t^2 < \pi/2$. Mas $t+t^2$ é sempre maior ou igual a $-1/4$ (que é o seu mínimo, em $t = -1/2$), pelo que a condição $-\pi/2 < t+t^2$ é satisfeita para todo o t. Já $t+t^2 = \pi/2$ ocorre quando $t = \frac{-1\pm\sqrt{1+2\pi}}{2}$, pelo que concluímos que o intervalo máximo de definição da solução é $]\frac{-1-\sqrt{1+2\pi}}{2}, \frac{-1+\sqrt{1+2\pi}}{2}[$.

6. Resolva o problema de valor inicial

$$(2x + e^x)\frac{dx}{dt} = t, \qquad x(0) = 1.$$

Resolução: A equação é não linear e já está escrita na forma separável. O lado esquerdo é a derivada da função composta $\frac{d}{dt}(x(t)^2 + e^{x(t)})$. Pelo que a equação é equivalente a

$$\frac{d}{dt}(x(t)^2 + e^{x(t)}) = t$$

e integrando dos dois lados, desde $t_0 = 0$ até t obtemos

$$\int_{t_0=0}^{t} \frac{d}{d\tau}(x(\tau)^2 + e^{x(\tau)})d\tau = \int_{t_0=0}^{t} \tau d\tau \Rightarrow x(t)^2 + e^{x(t)} - x(0)^2 - e^{x(0)} = t^2/2$$
$$\Rightarrow x(t)^2 + e^{x(t)} = x(0)^2 + e^{x(0)} + t^2/2 \Rightarrow x(t)^2 + e^{x(t)} = 1 + e + t^2/2.$$

Mas, neste momento, chegamos a um ponto em que a equação $x^2 + e^x = 1 + e + t^2/2$ não é possível de ser resolvida de forma explícita em ordem a x para se obter a forma exacta de $x(t)$. O melhor que se consegue, neste caso, é apelar ao teorema da função implícita o qual garante que, por ser $2x + e^x \neq 0$ em $x(0) = 1$, podemos concluir que na vizinhança desta condição inicial, ou seja, de $(t_0, x_0) = (0, 1)$ a equação implícita

$$x^2 + e^x = 1 + e + t^2/2$$

define, de forma única, uma solução (infinitamente) diferenciável $x(t)$ que satisfaz a condição inicial, com um tempo de existência numa vizinhança de $t_0 = 0$.