Cálculo Diferencial e Integral - III

Exemplos de Resoluções

Semana 5 - 9 a 13 de Outubro de 2023

1. Obtenha um potencial vetorial dos seguintes campos.

   (a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (-y, z, 3x)$,

   (b) $\mathbf{F}(x,y,z) = \big(yz, x, xy^2\big)$.

Resolução:

(a) Para que exista tal campo é necessário que $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$. Então

$$\operatorname{div}\mathbf{F} \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\big(-y\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(z\big) + \frac{\partial}{\partial z}\big(3x\big) \;=\; 0 \qquad \text{em } \mathbb{R}^3,$$

pelo que se confirma que existe um campo vetorial $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (dado que as componentes de $\mathbf{F}$ são de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, sendo $\mathbb{R}^3$ simplesmente conexo) tal que

$$\text{rot }\mathbf{G} = \mathbf{F}. \tag{1}$$

Para determinar $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$, determinamos uma solução da equação (1):

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{G} \;&=\; \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} \\
&=\; \left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}, \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}, \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) \;=\; \big(-y, z, 3x\big).
\end{aligned}$$

Assim, vamos calcular funções G_1, G_2 e G_3 tais que

$$\begin{cases} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = -y \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} = z \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = 3x. \end{cases}$$

Sabemos que existe uma solução deste sistema tal que uma das componentes, G_1, G_2 ou G_3, é nula. Podemos considerar, por exemplo, $G_1(x,y,z) \equiv 0$, e assim

$$\begin{cases} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = -y \\ \frac{\partial G_3}{\partial x} = -z \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} = 3x. \end{cases}$$

Integrando a terceira e a segunda equações em ordem a x obtém-se:

$$\begin{aligned} G_2(x,y,z) &= \int 3x\,dx + A_1(y,z) &= \frac{3}{2}x^2 + A_1(y,z) \\ G_3(x,y,z) &= -\int z\,dx + A_2(y,z) &= -xz + A_2(y,z). \end{aligned}$$

Substituindo na primeira equação, tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(-xz + A_2(y,z)\big) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{3}{2}x^2 + A_1(y,z)\right) = -y\,,$$

ou seja,

$$\frac{\partial A_2(y,z)}{\partial y} - \frac{\partial A_1(y,z)}{\partial z} = -y\,. \tag{2}$$

Precisamos pois de determinar funções $A_1(y,z)$ e $A_2(y,z)$ que verifiquem a equação (2). Dado que temos uma equação e duas incógnitas, existem certamente soluções tais que $A_1(y,z) \equiv 0$ (por exemplo). Desta forma, resta determinar $A_2(y,z)$ tal que

$$\frac{\partial A_2(y,z))}{\partial y} = -y.$$

Primitivando em ordem a y, obtém-se

$$A_2(y,z) = \int (-y)\,dy + B(z) = -\frac{y^2}{2} + B(z)\,.$$

Em conclusão,

$$G_2(x,y,z) = \frac{3}{2}x^2, \qquad G_3(x,y,z) = -xz - \frac{y^2}{2} + B(z)\,,$$

ou seja,

$$G(x,y,z) = \left(0, \frac{3}{2}x^2, -xz - \frac{y^2}{2} + B(z)\right),$$

com $B(z)$ qualquer função de classe C^1.

Observação. Note que o problema pede *apenas um* potencial vetorial e não *todos* os possíveis potenciais vetoriais, de $\mathbf{F}$; para resolver este último problema não poderíamos ter feito as sucessivas escolhas que facilitam os cálculos, mas restringem o conjunto de funções onde se procura a solução. No entanto, do ponto de vista as aplicações, é em geral apenas necessária a determinação de um potencial vetorial, e não de todos.

(b) Para que exista tal campo é necessário que $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$, o que é claramente verdadeiro em $\mathbb{R}^3$. Podemos assim concluir que existe um campo vetorial $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (dado que as componentes de $\mathbf{F}$ são de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, e $\mathbb{R}^3$ é simplesmente conexo) tal que $\operatorname{rot}\mathbf{G} = \mathbf{F}$. Para determinar $\mathbf{G}$ vamos considerar $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$. Então

$$\operatorname{rot}\mathbf{G} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}, \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}, \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) = \big(yz, x, xy^2\big).$$

Assim temos que calcular funções G_1, G_2 e G_3 tais que

$$\begin{cases} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = yz \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} = x \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = xy^2. \end{cases}$$

Podemos considerar (por exemplo) $G_3(x,y,z) \equiv 0$ e, assim,

$$\begin{cases} \frac{\partial G_2}{\partial z} = -yz \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} = x \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = xy^2. \end{cases}$$

Primitivando a primeira e a segunda equação em ordem a z, obtemos

$$\begin{aligned} G_2(x,y,z) &= \int -yz\,dz + A_1(x,y) &= -\frac{yz^2}{2} + A_2(x,y) \\ G_1(x,y,z) &= \int x\,dz + A_2(x,y) &= xz + A_1(x,y). \end{aligned}$$

Substituindo na terceira equação,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{yz^2}{2} + A_2(x,y)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\big(xz + A_1(x,y)\big) = xy^2,$$

que é equivalente a

$$\frac{\partial A_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial A_1(x,y)}{\partial y} = xy^2.$$

Resta pois o problema de determinar funções $A_1(x,y)$ e $A_2(x,y)$ que verifiquem a equação acima. Mais uma vez para simplificar os cálculos, podemos (por exemplo) procurar soluções tais que $A_1(x,y) \equiv 0$. Vamos então determinar $A_2(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial A_2(x,y)}{\partial x} = xy^2.$$

Primitivando em ordem a x, obtemos

$$A_2(x,y) = \int xy^2 dx + B(y) = \frac{x^2y^2}{2} + B(y).$$

Dado que $B(y)$ é uma função arbitrária, podemos escolher $B(y) = 0$ (por exemplo). Um potencial vetorial para $\mathbf{F}$ em $\mathbb{R}^3$ é:

$$\mathbf{G}(x,y,z) = \left(xz, -\frac{yz^2}{2} + \frac{x^2y^2}{2}, 0\right).$$

Neste tipo de problemas, pode ser boa ideia verificar, no final, que de facto $\operatorname{rot} \mathbf{G} = \mathbf{F}$ (fica como exercício para o aluno).

2. Considere a superfície definida por

$$S \;=\; \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2+z^2=1\,,\; z>0\Big\}$$

orientada segundo a normal unitária $\nu=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ tal que $\nu_3>0$.

(a) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de

$$\mathbf{H}(x,y,z) \;=\; \big(xz,\, yz,\, -z^2+1\big)$$

através de S (no sentido de ν).

(b) Calcule o fluxo de

$$\mathbf{F}(x,y,z) \;=\; \big(x+y^3z,\, y,\, z\big)$$

através de S (no sentido de ν).

Resolução:
(a) $\mathbf{H}$ está definida e é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ (um conjunto em estrela) e a sua divergência é

$$\operatorname{div}\mathbf{H}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}(xz)+\frac{\partial}{\partial y}(yz)+\frac{\partial}{\partial z}(-z^2+1)=z+z-2z=0 \qquad \text{em } \mathbb{R}^3.$$

Assim sendo existe (pelo menos um) potencial vetorial $\mathbf{\Phi}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{rot}\mathbf{\Phi}=\mathbf{H}$.
Sendo $\mathbb{R}^3$ um conjunto em estrela, fazemos o cálculo de um potencial vetorial pela fórmula integral:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}(x,y,z) &= \int_0^1 \mathbf{H}(tx,ty,tz)\times(tx,ty,tz)\,dt \\
&= \int_0^1 \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ t^2xz & t^2yz & -t^2z^2+1 \\ tx & ty & tz \end{vmatrix}\,dt \\
&= \int_0^1 \Big(2t^3yz^2-ty,\; -2t^3xz^2+tx,\; 0\Big)\,dt \\
&= \Big(yz^2,\; -xz^2,\; 0\Big)\underbrace{\int_0^1 2t^3\,dt}_{\substack{\parallel \\ 1/2}} \;+\; \Big(-\,y,\; x,\; 0\Big)\underbrace{\int_0^1 t\,dt}_{\substack{\parallel \\ 1/2}} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\,y\left(z^2-1\right),\; x\left(1-z^2\right),\; 0\,\Big).
\end{aligned}$$

Parametrizando o bordo de S, ∂S, por

$$\gamma(t) \;=\; \big(\cos\theta,\, \operatorname{sen}\theta,\, 0\big) \qquad \theta\in[0,2\pi],$$

e aplicando o teorema de Stokes, obtemos:

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{H}\cdot\nu\,dS &= \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{\Phi}\cdot\nu\,dS = \int_\gamma \mathbf{\Phi}\cdot d\gamma \\
&= \int_0^{2\pi} \mathbf{\Phi}\big(\gamma(\theta)\big)\cdot\gamma'(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big(-\operatorname{sen}\theta,\,\cos\theta,\,0\big)\cdot\big(-\operatorname{sen}\theta,\,\cos\theta,\,0\big)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta\big)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta = \pi.
\end{aligned}$$

Note-se que, sem a exigência do uso do teorema de Stokes, este fluxo seria até mais facilmente calculado com recurso apenas ao teorema da divergência, tal como na alínea seguinte.

(b) Note que, neste caso, $\operatorname{div}\mathbf{F} = 3$ e, por isso, não há potencial vetorial para F. No entanto, e tendo em conta que $\operatorname{div}\mathbf{F}$ é constante, é proveitoso usar o teorema da divergência. Seja E o hemisfério norte da bola de raio centrada na origem, isto é, $E = \big\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2<1,\ z>0\big\}$. Então

$$\iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \iiint_E 3\,dV = 3\operatorname{Vol}_3(E) = 3\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 2\pi.$$

Por outro lado, sendo a fronteira de E, $\partial E = S + T$, onde $T = \big\{(x,y,0) : x^2+y^2<1\big\}$, o fluxo através de T é também fácil de calcular:

$$\iint_T \mathbf{F}\cdot\nu\,dS = \iint_T \big(x+y^2z,\ y,\ z\big)\cdot(0,0,-1)\,dS = \iint_T -z\,dS = 0$$

(pois $z = 0$ em T).

Finalmente, pelo teorema da divergência:

$$\begin{aligned}
2\pi &= \iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV \\
&= \iint_S \mathbf{F}\cdot\nu\,dS + \underbrace{\iint_T \mathbf{F}\cdot\nu\,dS}_{\overset{\shortparallel}{0}} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\nu\,dS.
\end{aligned}$$

3. Considere a equação diferencial ordinária

$$y' = \operatorname{sen} y.$$

(a) Esboce o campo de direções e trace os respetivos tipos de soluções.

(b) Determine todos os pontos de equilíbrio da equação e classifique-os quanto a serem estáveis ou instáveis.

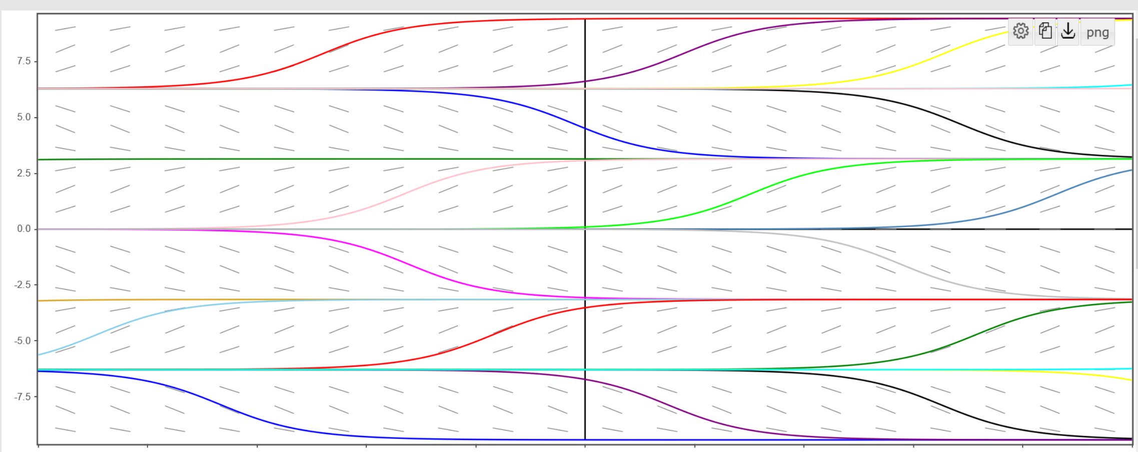
Resolução:
(a)A equação é autónoma, visto que a derivada da solução depende apenas do valor (da posição) y e não do instante de tempo t. Assim, as inclinações do campo de direções, no plano ty, dependem só do valor de y, sendo paralelas para todo o t. As soluções serão também paralelas, dependendo apenas do valor $y(t_0)$ da sua condição inicial.

Como é habitual, para equações autónomas, começamos então por determinar os pontos de equilíbrio da equação, ou seja, os valores de y para os quais a derivada da solução é nula. Nesta caso são

$$y' = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} y = 0 \Leftrightarrow y = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Entre os pontos de equilíbrio a derivada pode apenas ter um dos sinais, ou positivo ou negativo porque, pelo teorema do valor intermédio para funções contínuas, se tivesse os dois sinais e transitasse de sinal entre dois pontos y teria de haver um outro zero entre eles, o que é impossível. Assim, é fácil ver que entre $2k\pi < y < (2k+1)\pi$, se tem apenas $\operatorname{sen} y > 0$, ou seja, a solução $y(t)$ será crescente, e entre $(2k+1)\pi < y < (2k+2)\pi$, tem-se $\operatorname{sen} y < 0$ e portanto aí $y(t)$ é decrescente.

Isto é suficiente para esboçar o campo de direções e alguns tipos de soluções.



(b) Já se viu, na alínea anterior, que os pontos de equilíbrio desta equação autónoma são as soluções constantes $y(t) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Resta analisar a sua estabilidade. Mas esta é evidente, até observando o campo de direções e o esboço das soluções:

- as soluções constantes $y(t) = k\pi$, com k par, são pontos de equilíbrio instável visto que pequenas perturbações das condições iniciais fazem as soluções afastarem-se do ponto de equilíbrio e convergir para $y(t) = k\pi$, com k ímpar.

- as soluções constantes $y(t) = k\pi$, com k ímpar, são pontos de equilíbrio estável porque, contrariamente às anteriores, pequenas perturbações das condições iniciais fazem as soluções convergir de volta a aproximarem-se delas.

4. Considere a equação diferencial ordinária

$$y' = \frac{2t}{y-t}$$

(a) Determine todas as soluções da forma $y(t) = mt$, com $m \in \mathbb{R}$.

(b) Esboce o campo de direções e trace os respetivos tipos de soluções. (Sugestão: Comece por procurar pontos do domínio da equação em que as derivadas das soluções têm valores determinados.)

Resolução:

(a) Substituindo $y(t) = mt$ na equação, procuramos os valores de m que a verificam, ou seja

$$\begin{aligned} m = \frac{2t}{mt-t} \Leftrightarrow m = \frac{2}{m-1} \quad &\Leftrightarrow \quad m^2 - m - 2 = 0 \quad (m \neq 1) \\ \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad m = 2 \quad \text{ou} \quad m = -1. \end{aligned}$$

Ou seja, as funções $y(t) = 2t$ e $y(t) = -t$ são as duas únicas soluções da forma $y(t) = mt$ da equação (Em rigor, como a equação não está definida no ponto $(0,0)$ do plano, estas soluções não podem ser considerada com domínio $t \in \mathbb{R}$, pelo que, relembrado que a definição de solução obriga a que os seus domínios sejam obrigatoriamente intervalos, deverão então ser considerados como domínios possíveis os intervalos $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ o que, em face das combinações de duas soluções para cada um dos dois intervalos, resulta em 4 soluções).

(b) Seguindo a sugestão, procuramos regiões do plano ty em que as derivadas das soluções tenham valores determinados. Seja o valor dessa derivada, digamos, λ. Então, os pontos do plano em que as soluções que por eles passam o fazem com derivada igual a λ são dados por

$$\lambda = \frac{2t}{y-t} \Leftrightarrow \lambda y - \lambda t = 2t \Leftrightarrow y = \frac{2+\lambda}{\lambda} t.$$

Ou seja, são retas que passam pela origem do plano, com declive $\frac{2+\lambda}{\lambda}$. Por exemplo, os pontos do plano ty onde as soluções passam com derivada nula são os pontos com $\lambda = 0$, ou seja $t = 0$ e isso corresponde ao eixo dos yy (reta com declive infinito). Sobre o eixo dos tt, ou seja, na reta $y = 0$ as soluções passam com derivada $\lambda = -2$. Os pontos onde as soluções passam com declive de 45, isto é com derivada $\lambda = 1$ são os pontos da reta $y = 3t$. Os pontos onde o declive das soluções é $\lambda = -1$ são precisamente $y = -t$, ou seja a reta cujo declive é o mesmo das soluções que passam nesses pontos. Ora essa situação especial corresponde à própria reta $y = -t$ ser ela mesmo solução. Idem, para os pontos onde o declive é $\lambda = 2$, que é a reta $y = 2t$. São as duas soluções obtidas na alínea anterior. Por fim, pontos especiais, que não estão sequer no domínio da equação são os da reta $y = t$, onde a equação não está definida visto o denominador da fração se anular: podemos considerar que são pontos em que as soluções atingem derivada infinita e deixam de estar definidas.

Esboçando os campos de direções, com os declives λ, sobre as retas $y = \frac{2+\lambda}{\lambda}t$ obtém-se então o esboço (a reta espessa a vermelho indica os pontos $y = t$ onde a equação não está definida e que, por isso, está fora do domínio da equação e das soluções):