Cálculo Diferencial e Integral - III

Exemplos de Resoluções

Semana 3 - 25 a 29 de Setembro de 2023

1. Calcule o fluxo do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$$

através da superfície S definida por $z = 1 - x^2 - y^2$ e $z \geq 0$ orientada para fora.

Resolução: Trata-se de uma porção do paraboloide de equação $z = 1 - x^2 - y^2$ situada acima do plano $z = 0$. Assim, podemos considerar para esta superfície a parametrização

$$g(u, v) = \big(u, v, 1 - u^2 - v^2\big)$$

com $(u, v) \in D = \{u^2 + v^2 \leq 1\}$, dado que a interseção de $z = 1 - x^2 - y^2$ com o plano $z = 0$ é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$. Temos que

$$\frac{\partial g}{\partial u} = (1, 0, -2u) \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial v} = (0, 1, -2v)$$

Como tal, a expressão geral do vetor normal a S necessário ao cálculo do fluxo é dada por

$$\overrightarrow{N} = \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (2u, 2v, 1)$$

Dado que a superfície S é orientada para fora, devemos usar este vetor $\overrightarrow{N}$ e não o seu simétrico $-\overrightarrow{N} = (-2u, -2v, -1)$. O fluxo do campo de $\mathbf{F}$ através de S é então dado por

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \nu \, dS = \iint_D \big(u, v, 1 - u^2 - v^2\big) \cdot (2u, 2v, 1) \, du \, dv = \iint_D \big(u^2 + v^2 + 1\big) \, du \, dv.$$

Atendendo a que D é o círculo de centro na origem e raio 1, usamos coordenadas polares, $x = \rho \cos\theta$ e $y = \rho \operatorname{sen}\theta$ para o cálculo do integral duplo (note que o jacobiano desta transformação de coordenadas é ρ) de onde resulta que:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \nu \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \big(\rho^2 + 1\big) \, \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

2. Mostre que 36π é o valor do fluxo do campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (0,0,z)$$

através da superfície esférica S definida por $x^2+y^2+z^2=9$ orientada para fora de S.

Resolução: Atendendo às coordenadas esféricas, a superfície S pode ser parametrizada por

$$g(\theta,\phi) = (3\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta, 3\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, 3\cos\phi)$$

para $\theta \in\,]0,2\pi[$ e $\phi \in\,]0,\pi[$. Temos

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = (-3\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, 3\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta, 0) \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial \phi} = (3\cos\phi\cos\theta, 3\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, -3\mathrm{sen}\,\phi)$$

Como tal, a expressão do vetor normal necessário ao cálculo do fluxo é dada por

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{N} &= \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \phi} \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ -3\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta & 3\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta & 0 \\ 3\cos\phi\cos\theta & 3\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta & -3\mathrm{sen}\,\phi \end{vmatrix} \\
&= \big(-9\,\mathrm{sen}^2\phi\cos\theta, -9\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}^2\phi, -9\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\phi\big)
\end{aligned}$$

Para que a superfície tenha orientação para fora há que considerar o vetor normal

$$-\overrightarrow{N} = \big(9\,\mathrm{sen}^2\phi\cos\theta, 9\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}^2\phi, 9\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\phi\big)$$

que "aponta para cima" no hemisfério norte (onde $\phi \in\,]0,\pi/2[$) e "aponta para baixo" no hemisfério sul (onde $\phi \in\,]\pi/2,\pi[$. O fluxo do campo $\mathbf{F}$ ao longo da superfície S é dado pelo integral de superfície

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\nu\, dS &= \iint_D \big(0,0,z(\theta,\phi)\big)\cdot\big(-\overrightarrow{N}(\theta,\phi)\big)\, d\theta\, d\phi \\
&= \iint_D (3\cos\phi)\ (9\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\phi)\, d\theta\, d\phi \\
&= 27\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{sen}\,\phi\cos^2\phi\, d\phi\, d\theta \\
&= 27\cdot 2\pi\cdot \left.\frac{-\cos^3\phi}{3}\right|_0^{\pi} \;=\; 27\cdot 2\pi\cdot\frac{2}{3} \\
&= 36\pi.
\end{aligned}$$

3. Seja f um campo escalar de classe $C^2(\mathbb{R}^3)$ e $\mathbf{F}$ um campo vetorial $C^2(\mathbb{R}^3)$. Diga se cada expressão tem significado. Em caso negativo, explique porquê. Em caso afirmativo, diga se é um campo vetorial ou escalar.

(a) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{F})$

(b) $\nabla f \times (\operatorname{div} \mathbf{F})$

Resolução:
(a) Sendo $\mathbf{F}$ um campo vetorial de classe C^2, $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ está bem definido

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

e representa um campo vectorial. Sendo assim $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{F})$ está bem definido e é também um campo vectorial.

(b) Sendo f um campo escalar de classe C^2, o gradiente de f está bem definido e representa um campo vectorial. Por outro lado, sendo $\mathbf{F}$ um campo vectorial $\operatorname{div} \mathbf{F}$ está bem definido e representa um campo escalar. Atendendo a que o produto externo é uma operação definida entre dois vetores em $\mathbb{R}^3$ mas $\operatorname{div} \mathbf{F}$ é um escalar e não um vetor, então $\operatorname{grad} f \times \operatorname{div} \mathbf{F}$ não está definido.

4. Determine o rotacional e a divergência dos campo vetoriais definidos por

(a) $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x, y, z) \qquad (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$

(b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (xyz, 0, -x^2y)$

Resolução:
(a) Seja $r(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$. Então

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{r}.$$

Identicamente,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{y}{r} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Desta forma, e como $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$, tem-se que

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{z}{r} \end{vmatrix} = \left(-\frac{z\,\frac{y}{r}}{r^2} + \frac{y\,\frac{z}{r}}{r^2}, \frac{z\,\frac{x}{r}}{r^2} - \frac{x\,\frac{z}{r}}{r^2}, -\frac{y\,\frac{x}{r}}{r^2} + \frac{x\,\frac{y}{r}}{r^2} \right) = (0, 0, 0)$$

e

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right) \\
&= \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} + \frac{r - \frac{y^2}{r}}{r^2} + \frac{r - \frac{z^2}{r}}{r^2} \\
&= \frac{3r - \frac{x^2+y^2+z^2}{r}}{r^2} = \frac{3r - r}{r^2} = \frac{2}{r} \\
&= \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.
\end{aligned}$$

(b) Tem-se que

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & 0 & -x^2y \end{vmatrix} = \big(-x^2, 3xy, -xz\big)$$

e

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xyz) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(-x^2y) = yz.$$

5. Verifique as seguintes igualdades (para $r > 0$):
   (a) $\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$, sendo $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $r = |\mathbf{r}|$.
   (b) $\operatorname{div}(r\mathbf{r}) = 4r$, sendo $\mathbf{r} = (x, y, z)$ e $r = |\mathbf{r}|$.

Resolução:
(a) Sendo $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, tem-se que

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} r &= \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}\right) \\
&= \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\
&= \frac{\mathbf{r}}{r}.
\end{aligned}$$

(b) Tem-se que (utilizando os cálculos das derivadas parciais de r, da resolução de 4(a)):

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(r\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial x}(xr) + \frac{\partial}{\partial y}(yr) + \frac{\partial}{\partial z}(zr) \\
&= r + x\frac{x}{r} + r + y\frac{y}{r} + r + z\frac{z}{r} \\
&= 3r + \frac{x^2+y^2+z^2}{r} = 4r.
\end{aligned}$$

6. Sejam f, g campos escalares e $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ campos vetoriais. Demonstre as identidades, admitindo que as derivadas parciais apropriadas existem e são contínuas.

   (a) $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G}$

   (b) $\operatorname{div}\,(\nabla f \times \nabla g) = 0.$

Resolução: Suponhamos que $\mathbf{F} = (P_1, Q_1, R_1)$ e $\mathbf{G} = (P_2, Q_2, R_2)$.

(a) Temos que

$$\mathbf{F} \times \mathbf{G} = (Q_1R_2 - Q_2R_1, P_2R_1 - P_1R_2, P_1Q_2 - Q_1R_2)$$

Então,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) &= \frac{\partial(Q_1R_2 - Q_2R_1)}{\partial x} + \frac{\partial(P_2R_1 - P_1R_2,)}{\partial y} + \frac{\partial(P_1Q_2 - P_2Q_1)}{\partial z} \\
&= Q_1\frac{\partial R_2}{\partial x} + R_2\frac{\partial Q_1}{\partial x} - Q_2\frac{\partial R_1}{\partial x} - R_1\frac{\partial Q_2}{\partial x} + R_1\frac{\partial P_2}{\partial y} + P_2\frac{\partial R_1}{\partial y} \\
&\quad -R_2\frac{\partial P_1}{\partial y} - P_1\frac{\partial R_2}{\partial y} + P_1\frac{\partial Q_2}{\partial z} + Q_2\frac{\partial P_1}{\partial z} - Q_2\frac{\partial P_1}{\partial z} - Q_1\frac{\partial P_2}{\partial z} \\
&= P_1\left(\frac{\partial Q_2}{\partial z} - \frac{\partial R_2}{\partial y}\right) + Q_1\left(\frac{\partial R_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial z}\right) + R_1\left(\frac{\partial P_2}{\partial y} - \frac{\partial Q_2}{\partial x}\right) \\
&\quad +P_2\left(\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z}\right) + Q_2\left(\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x}\right) + R_2\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y}\right) \\
&= -\mathbf{F} \cdot \operatorname{rot}\, \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot}\, \mathbf{F}.
\end{aligned}$$

(b) Da alínea anterior, temos que

$$\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = \nabla g \cdot \operatorname{rot}\,(\nabla f) - \nabla f \cdot \operatorname{rot}(\nabla g)$$

Se f é uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}^3$ então $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$. Deste resultado, obtemos que

$$\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = \nabla g \cdot 0 - \nabla f \cdot 0 = 0.$$

7. Mostre que qualquer campo vetorial da forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) \; = \; \Big(f(x), g(y), h(z)\Big),$$

em que f, g e h são continuamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$, é irrotacional.

Resolução: Basta mostrar que rot $\mathbf{F} = 0$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Assim

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f(x) & g(y) & h(z) \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y} h(z) - \frac{\partial}{\partial z} g(y), \frac{\partial}{\partial z} f(x) - \frac{\partial}{\partial x} h(z), \frac{\partial}{\partial x} g(y) - \frac{\partial}{\partial y} f(x) \right) \\
&= (0, 0, 0),
\end{aligned}$$

como se queria mostrar.

8. Existirá um campo vetorial $\mathbf{G}$ em $\mathbb{R}^3$ tal que rot $\mathbf{G} = (x\operatorname{sen} y, \cos y, z - xy)$? Justifique.

Resolução: Sabemos que se $\mathbf{G}$ é um campo vetorial de classe C^2 em $\mathbb{R}^3$, então div (rot $\mathbf{G}$) $= 0$.

Mas, o campo vetorial dado $(x\operatorname{sen} y, \cos y, z - xy)$ tem por divergência

$$\frac{\partial}{\partial x}(x \operatorname{sen} y) + \frac{\partial}{\partial y}(\cos y) + \frac{\partial}{\partial z}(z - xy) \;=\; \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} y + 1 \;=\; 1$$

pelo que não poderá existir $\mathbf{G}$ em $\mathbb{R}^3$ tal que rot $\mathbf{G} = (x \operatorname{sen} y, \cos y, z - xy)$.

9. Verifique a conclusão do Teorema da Divergencia para o campo vectorial $\mathbf{F}$ na região V, onde
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, xy, z)$$
e V é o sólido limitado pelo paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ e pelo plano $z = 0$.

Resolução: Há que verificar que

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \nu dS$$

em que V é o sólido dado, S a superfície da sua fronteira e ν a normal unitária exterior a S. Comecemos por calcular o integral triplo de div $\mathbf{F} = 3x + 1$. Dado que V é o sólido delimitado pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ e o círculo $x^2 + y^2 \leq 4$ teremos que o sólido é o conjunto de pontos (x, y) tais que $(x, y) \in D = B_2(0, 0) = \{(x, y) \; ; \; x^2 + y^2 \leq 4\}$ e $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$. Assim

$$\iiint_V (3x+1) dV = \iint_D \int_0^{4-x^2-y^2} (3x+1) \, dz \, dxdy = \iint_D (3x+1)(4 - x^2 - y^2) dxdy.$$

Mudando para coordenadas polares, $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta$, temos que

$$\iiint_V (3x+1) dV = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (3\rho \cos \theta + 1)(4 - \rho^2) \rho d\theta d\rho = 8\pi.$$

Por outro lado, $S = S_1 \cup S_2$ em que S_1 é a superfície do parabolóide, $z = 4 - x^2 - y^2$, com $(x, y) \in D$ e S_2 é o círculo D no plano $z = 0$. Assim

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \nu dS = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \nu_1 dS + \iint_{S_2} F \cdot \nu_2 dS$$

É fácil de entender que $\nu_2 = (0, 0, -1)$ pelo que $\mathbf{F} \cdot \nu_2 = z$ e dado que em S_2 se tem $z = 0$ obtemos

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \nu_2 dS = 0$$

Por outro lado, S_1 pode ser parametrizada por

$$g(u, v) = (u, v, 4 - u^2 - v^2) \quad , \quad (u, v) \in D$$

e a normal a S_1 necessária ao cálculo do fluxo é

$$\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = (2u, 2v, 1)$$

Dado que a normal exterior a S_1 tem terceira componente positiva, usaremos $\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}$ para o cálculo do integral. Então

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \nu_1 dS &= \iint_D (u^2, uv, 4 - u^2 - v^2) \cdot (2u, 2v, 1) du\, dv \\ &= \iint_D (2u^3 + 2uv^2 + 4 - u^2 - v^2) du\, dv. \end{aligned}$$

Fazendo a transformação para coordenadas polares ($u = r\cos\theta$, $v = r\operatorname{sen}\theta$) obtém-se

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \nu_1 dS = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(2r^3\cos^3\theta + 2r^3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta + 4 - r^2\right) r d\theta\, dr = 8\pi.$$

como se pretendia.

Para o cálculo expedito do integral anterior, note que se f é uma função periódica de média zero então

$$\int_a^b f(t)\, dt = 0$$

sendo $b - a$ o período de f. Como exemplos:

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 t\, dt = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t \cos t\, dt = 0.$$

10. Use o Teorema da divergência para calcular o valor de

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \nu\, dS$$

em que

(a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (\text{sen}\,(\pi x), zy^3, z^2+4x)$ e S é a superfície da fronteira do paralelipípedo $-1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$ e $1 \le z \le 4$.

(b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xz, 1-4xy^2, 2z-z^2)$ e S é a superfície da fronteira do sólido limitado por $z = 6-2x^2-2y^2$ e o plano $z=0$.

(c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (-2xy, y^2, 3z)$ e S a superfície que limita o sólido

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 \le 1 \ \text{ e } \ z \ge x+y\}.$$

Resolução:
(a) Vamos usar o Teorema da divergência na seguinte forma:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\nu\,dS = \iiint_E \text{div}\,\mathbf{F}\,dV,$$

sendo E o paralelipípedo limitado pelos planos $x=-1$, $x=2$, $y=0$, $y=1$, $z=1$ e $z=4$. Temos então que os limites de integração serão

$$-1 \le x \le 2 \quad , \quad 0 \le y \le 1 \quad , \quad 1 \le z \le 4.$$

Por outro lado

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(\text{sen}\,(\pi x)) + \frac{\partial}{\partial y}(zy^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2+4x) = \pi\cos(\pi x) + 3zy^2 + 2z.$$

Basta-nos agora calcular o integral

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\nu\,dS &= \iiint_E \text{div}\,\mathbf{F}\,dV \\ &= \int_{-1}^{2}\int_0^1\int_1^4 (\pi\cos(\pi x) + 3zy^2 + 2z)dz\,dy\,dx \\ &= \frac{135}{2}.\end{aligned}$$

(b) Vamos usar o Teorema da divergência:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\nu\,dS = \iiint_E \text{div}\,\mathbf{F}dV,$$

sendo E o sólido limitado pela superfície do parabolóide $z = 6-2x^2-2y^2$, $z \ge 0$. Assim,

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 < 3\,,\ 0 < z < 6-2x^2-2y^2\}$$

ou, usando coordenadas cilíndricas $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\,\text{sen}\,\theta$, $z = z$:

$$E = \{(\rho,\theta,z) \ : \ 0 < \rho < \sqrt{3}\,,\ 0 < \theta < 2\pi\,,\ 0 < z < 6-2\rho^2\}.$$

Por outro lado

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2xz) + \frac{\partial}{\partial y}(1-4xy^2) + \frac{\partial}{\partial z}(2z-z^2) = 2z - 8xy + 2 - 2z = 2 - 8xy.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\nu\, dS &= \iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV \\
&= \iiint_E (2-8xy)\, dV \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^{6-2\rho^2} (2 - 8\rho^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta)\rho\, dz\, d\theta\, d\rho \\
&= 18\pi.
\end{aligned}$$

(c) Vamos usar o Teorema da divergência na forma:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\nu\, dS = \iiint_B \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV$$

sendo B a bola $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ com $z \geq x+y$, ou seja acima do plano $z = x+y$. Note-se que iremos calcular o integral triplo de

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(-2xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(3z) = -2y + 2y + 3 = 3$$

em

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 < 1 \ \text{ e } \ x+y < z < \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}.$$

Usando coordenadas cilíndricas

$$x = \rho\cos\theta \quad , \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta \quad , \quad z = z$$

onde $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $\rho(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) \leq z \leq \sqrt{1-\rho^2}$, temos que

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\nu\, dS = \iiint_B 3\, dV = 3\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\rho(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)}^{\sqrt{1-\rho^2}} \rho\, dz\, d\theta\, d\rho = 2\pi.$$

11. Use o teorema da divergência para calcular $\iint_S (2x+2y+z^2)dS$ onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Resolução: A superfície S em questão é a esfera unitária, que é a fronteira da bola unitária B dada por $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ e tem um vector normal num ponto (x,y,z) da forma (x,y,z) (o qual aponta para "fora"). Observe que a função integranda é

$$2x + 2y + z^2 = (2,2,z)\cdot(x,y,z) = (2,2,z)\cdot\nu,$$

pois a normal unitária em cada ponto de ∂B é

$$\nu = \frac{\nabla(x^2+y^2+z^2-1)}{\|\nabla(x^2+y^2+z^2-1)\|} = \frac{1}{2}\big(2x,2y,2z\big) = (x,y,z).$$

Desta forma o integral que se pretende calcular é de facto o fluxo do campo $(2,2,z)$ através da superfície da esfera S que limita a bola B. Pelo teorema da divergência,

$$\begin{aligned}\iint_S (2x+2y+z^2)\,dS &= \iint_S (2,2,z)\cdot(x,y,z)\,dS \\ &= \iiint_B \operatorname{div}(2,2,z)\,dV \\ &= \iiint_B dV = \operatorname{Vol}_3(B) = \frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$

12. Seja f um campo escalar de classe C^1 e g um campo escalar de classe C^2 ambos definidos num conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$. Demonstre a seguinte igualdade, (designada *primeira fórmula de Green*), onde E é um sólido simples cujo fecho está contido em A e S a sua fronteira:

$$\iint_S f\,\nabla g\cdot\nu\,dS = \iiint_E (f\Delta g + \nabla f\cdot\nabla g)\,dV$$

Resolução: Note que, por aplicação do teorema da divergência

$$\iint_S (f\nabla g)\cdot\nu\,dS = \iiint_E \operatorname{div}(f\nabla g)dV$$

Como

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(f\nabla g) &= \operatorname{div}\left(f\frac{\partial g}{\partial x}, f\frac{\partial g}{\partial y}, f\frac{\partial g}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + f\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} + f\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z} + f\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \\ &= \nabla f\cdot\nabla g + f\,\Delta g\end{aligned}$$

o resultado fica, assim, demonstrado.