Cálculo Diferencial e Integral - III

Exemplos de Resoluções

Semana 2 - 18 a 22 de Setembro de 2023

1. Calcule integral de superfície de $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+1/4}$ sendo S a porção do paraboloide $z=9-x^2-y^2$ acima do plano xOy.

Resolução: Comecemos por parametrizar a superfície. Dado que a interseção do paraboloide com o plano $z=0$ é $x^2+y^2=9$, consideraremos a parametrização

$$g(x,y)=\begin{cases} x=x \\ y=y \\ z=9-x^2-y^2, \end{cases}$$

em que $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<9\}$. Sendo assim

$$\begin{aligned}
\iint_S f(x,y,z)\,dS &= \iint_T f(x,y)\left\|\frac{\partial g}{\partial x}\times\frac{\partial g}{\partial y}\right\| dxdy \\
&= \iint_T \sqrt{x^2+y^2+1/4}\,\left\|(2x,2y,1)\right\| dxdy \\
&= \iint_T \sqrt{x^2+y^2+1/4}\,\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+1}\,dxdy \\
&= \iint_T 2\sqrt{x^2+y^2+1/4}\,\sqrt{x^2+y^2+1/4}\,dxdy \\
&= 2\iint_T \left(x^2+y^2+\tfrac{1}{4}\right) dxdy.
\end{aligned}$$

Usando coordenadas polares neste último integral em $T\subset\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

em que $0<\rho<3$ e $0<\theta<2\pi$,

$$\iint_S f\,dS = 2\int_0^{2\pi}\int_0^3 \left(\rho^2+\tfrac{1}{4}\right)\rho\,d\rho d\theta = 4\pi\left(\tfrac{\rho^4}{4}+\tfrac{\rho^2}{8}\right)\Big|_0^3 = \frac{171}{2}\pi.$$

2. Determine a área da superfície dada por

   (a) A parte inferior da esfera $x^2+y^2+z^2=2$ cortada pelo cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$

   (b) $z=x^2+y^2$ com $z<1$.

   (c) A fronteira do sólido limitado pelas superfícies $z=1$, $z=4$, $x^2+y^2=1$ e $z=x^2+y^2$.

Resolução:
(a) Sejam

$$\begin{cases} x = r\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = r\,\cos\phi \end{cases}$$

Note-se que na esfera $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$. A interseção da esfera com o cone é:

$$x^2+y^2+z^2=2 \quad \text{e} \quad z=\sqrt{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad z^2+z^2=2 \quad \Leftrightarrow \quad z^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad z=1,$$

pois $z\geq 0$. Logo,

$$1=\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \phi=\pi/4.$$

Para a parte da esfera que está abaixo do cone, temos pois que $\frac{\pi}{4}<\phi<\pi$. Assim sendo,

$$r(\phi,\theta)=(\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta,\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta,\sqrt{2}\cos\phi),$$

com $\frac{\pi}{4}<\phi<\pi$ e $0<\theta<2\pi$. Desta forma

$$\frac{\partial r}{\partial\phi}=(\sqrt{2}\,\cos\phi\cos\theta,\sqrt{2}\,\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta,-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\phi)$$

e

$$\frac{\partial r}{\partial\theta}=(-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta,\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\phi\,\cos\theta,0).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial\phi}\times\frac{\partial r}{\partial\theta} &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sqrt{2}\cos\phi\cos\theta & \sqrt{2}\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\theta & -\sqrt{2}\mathrm{sen}\,\phi \\ -\sqrt{2}\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta & \sqrt{2}\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= (2\,\mathrm{sen}^2\phi\,\cos\theta,2\,\mathrm{sen}^2\phi\,\mathrm{sen}\,\theta,2\,\mathrm{sen}\,\phi\,\cos\phi).\end{aligned}$$

Disso resulta que

$$\left\|\frac{\partial r}{\partial\phi}\times\frac{\partial r}{\partial\theta}\right\|=\sqrt{4\,\mathrm{sen}^4\phi\cos^2\theta+4\,\mathrm{sen}^4\phi\,\mathrm{sen}^2\theta+4\,\mathrm{sen}^2\phi\cos^2\phi}=2|\mathrm{sen}\,\phi|=2\,\mathrm{sen}\,\phi$$

(pois $\frac{\pi}{4}<\phi<\pi$). Assim,

$$\begin{aligned}Vol_2(S) &= \iint_D\left\|\frac{\partial r}{\partial\phi}\times\frac{\partial r}{\partial\theta}\right\|dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}2\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi d\theta \quad = \quad 2\pi\big(2+\sqrt{2}\big).\end{aligned}$$

(b) A superfície S é uma porção do paraboloide de equação $z = x^2 + y^2$. Uma parametrização de S é

$$g(u,v) = \big(u, v, u^2 + v^2\big)$$

com $D = \{u^2 + v^2 < 1\}$, e

$$\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = (2u, 2v, 1).$$

A área de superfície pedida é

$$Vol_2(S) = \iint_S \|(2u, 2v, 1)\| dS = \iint_D \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}\, du\, dv.$$

Atendendo a que D é o círculo de centro na origem e raio 1, podemos usar coordenadas polares ($x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho \operatorname{sen}\theta$) pelo que

$$Vol_2(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2}\rho\, d\rho\, d\theta \ = \frac{\pi(5\sqrt{5} - 1)}{6}$$

(c) O sólido é a parte interior ao paraboloide $z = x^2 + y^2$ e exterior à superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$ compreendida entre os planos horizontais $z = 1$ e $z = 4$. O seu topo, que designamos por S_T, é a coroa circular

$$1 < x^2 + y^2 < 4 \qquad \text{contida no plano } z = 4;$$

a superfície (lateral) interior, S_1, é a face do cilindro dada por $x^2 + y^2 = 1$ e a superfície (lateral) exterior, S_2, é o paraboloide $z = x^2 + y^2$, ambas entre os planos $z = 1$ e $z = 4$. Intersectando tanto o paraboloide como o cilindro com o plano $z = 1$ obtém-se a mesma curva: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$. Assim, a base do sólido é uma curva que, como tal, não contribui para o valor da área. Assim sendo, e executando desde já o cálculo (elementar!) das áreas de S_T e S_1:

$$\begin{aligned}
Vol_2(S) &= Vol_2(S_T) + Vol_2(S_1) + Vol_2(S_2) \\
&= \big(\pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2\big) \ + \ (2\pi \cdot 1) \cdot 3 \ + \ Vol_2(S_2) \\
&= 9\pi \ + \ Vol_2(S_2)
\end{aligned}$$

Quanto à área de S_2 sabemos que

$$Vol_2(S_2) \ = \ \iint_{S_4} dS$$

Para calcular o integral, vamos começar por parametrizar a superfície. Em coordenadas cartesianas

$$g(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

onde $g : T \to S_2$, com $T = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\big\}$. Assim:

$$\begin{aligned}
Vol_2(S_2) &= \iint_T \left\| \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} \right\| dx\, dy \\
&= \iint_T \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\; dx\, dy.
\end{aligned}$$

Mudando para coordenadas polares,

$$\begin{aligned} Vol_2(S_2) &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 \left(4r^2+1\right)^{1/2} r\,dr\,d\theta \\ &= 2\pi\,\frac{2}{3\cdot 8}\left(4r^2+1\right)^{3/2}\Big|_1^2 \;=\; \frac{\pi}{6}\left(17^{3/2}-5^{3/2}\right). \end{aligned}$$

Finalmente

$$Vol_2(S) \;=\; 9\pi + \frac{\pi}{6}\left(17^{3/2}-5^{3/2}\right).$$

3. Seja $f : K \to \mathbb{R}$ de classe C^1 no compacto $K \subset \mathbb{R}^2$ (com fronteira de medida nula e interior não-vazio). Mostre que a área da superfície $z = f(x,y)$, correspondente ao gráfico de f para $(x,y) \in K$, é dada pela fórmula

$$A = \iint_K \sqrt{1+\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\tfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

Aproveite o resultado para determinar a área da porção do paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre os cilindros $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$.

Resolução: Uma parametrização da superfície, que designamos por S, é $g : K \to S$ dada por

$$g(x,y) = \big(x, y, f(x,y)\big).$$

A área de S é, pois, dada por

$$A = \iint_S dS = \iint_K \left|\left|\frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial g}{\partial v}\right|\right| dudv.$$

Temos assim que

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right).$$

Desta forma

$$A = \iint_K \sqrt{1+\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\tfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy,$$

que é a fórmula pretendida.

Vamos aplicar esta fórmula ao cálculo pedido. Temos que

$$z = f(x,y) = y^2 - x^2$$

com $D = \big\{(x,y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\big\}$. Então:

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 4y^2 + 4x^2}\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares temos que

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r \operatorname{sen}\theta$$

pelo que $0 < \theta < 2\pi$ e $1 < r < 2$. Então

$$A \;=\; \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr\, d\theta \;=\; 2\pi \int_1^2 \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr.$$

Tal como na alínea (c) do exercício resolvido anterior, a primitiva de $\sqrt{1+4r^2}\, r = (1 + 4r^2)^{1/2}\, r$ é imediata, dada por $\frac{2}{3\cdot 8}(1+4r^2)^{3/2}$. Então

$$A \;=\; 2\pi \frac{2}{3\cdot 8} \Big(1 + 4r^2\Big)^{3/2}\Big|_1^2 \;=\; \frac{\pi}{6}\left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right).$$

4. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; y = x^2 + z^2 \;;\; 1 < y < 4\}.$$

Sabendo que S tem densidade de massa dada por $\alpha(x,y,z) = \sqrt{1 + 4(x^2+z^2)}$ calcule a massa total de S.

Resolução: A massa de S é dada pelo integral

$$M(S) \;=\; \int_S \alpha\, dS.$$

Considerando a parametrização

$$g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho^2, \rho \operatorname{sen}\theta) \quad , \quad 0 < \theta < 2\pi \;\;,\;\; 1 < \rho < 2$$

tem-se então que

$$M(S) \;=\; \int_0^{2\pi} \int_1^2 \alpha(g(\rho,\theta)) \left\| \frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right\| \rho\, d\rho\, d\theta \;=\; 2\pi \int_1^2 (1 + 4\rho^2)\, \rho\, d\rho = 33\pi.$$

5. Calcule o fluxo do campo vetorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$$

através da superfície S definida por $z = 1 - x^2 - y^2$ e $z \geq 0$ orientada para fora.

Resolução: Trata-se de uma porção do paraboloide de equação $z = 1 - x^2 - y^2$ situada acima do plano $z = 0$. Assim, podemos considerar para esta superfície a parametrização

$$g(u, v) = \big(u, v, 1 - u^2 - v^2\big)$$

com $(u, v) \in D = \{u^2 + v^2 \leq 1\}$, dado que a interseção de $z = 1 - x^2 - y^2$ com o plano $z = 0$ é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$. Temos que

$$\frac{\partial g}{\partial u} = (1, 0, -2u) \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial v} = (0, 1, -2v)$$

Como tal, a expressão geral do vetor normal a S necessário ao cálculo do fluxo é dada por

$$\overrightarrow{N} \;=\; \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \;=\; \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} \;=\; (2u, 2v, 1)$$

Dado que a superfície S é orientada para fora, devemos usar este vetor $\overrightarrow{N}$ e não o seu simétrico $-\overrightarrow{N} = (-2u, -2v, -1)$. O fluxo do campo de $\mathbf{F}$ através de S é então dado por

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \nu \, dS \;=\; \iint_D \big(u, v, 1 - u^2 - v^2\big) \cdot (2u, 2v, 1)\, du\, dv \;=\; \iint_D \big(u^2 + v^2 + 1\big)\, du\, dv.$$

Atendendo a que D é o círculo de centro na origem e raio 1, usamos coordenadas polares, $x = \rho \cos\theta$ e $y = \rho \operatorname{sen}\theta$ para o cálculo do integral duplo (note que o jacobiano desta transformação de coordenadas é ρ) de onde resulta que:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \nu \, dS \;=\; \int_0^{2\pi} \int_0^1 \big(\rho^2 + 1\big)\, \rho \, d\rho \, d\theta \;=\; \frac{3\pi}{2}.$$

6. Mostre que 36π é o valor do fluxo do campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, z)$$

através da superfície esférica S definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ orientada para fora de S.

Resolução: Atendendo às coordenadas esféricas, a superfície S pode ser parametrizada por

$$g(\theta, \phi) = (3 \operatorname{sen}\phi \cos\theta, 3 \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, 3\cos\phi)$$

para $\theta \in \,]0, 2\pi[$ e $\phi \in \,]0, \pi[$. Temos

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = (-3 \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, 3 \operatorname{sen}\phi \cos\theta, 0) \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial \phi} = (3\cos\phi\cos\theta, 3\cos\phi \operatorname{sen}\theta, -3\operatorname{sen}\phi)$$

Como tal, a expressão do vetor normal necessário ao cálculo do fluxo é dada por

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{N} &= \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \phi} \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ -3\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta & 3\operatorname{sen}\phi\cos\theta & 0 \\ 3\cos\phi\cos\theta & 3\cos\phi\operatorname{sen}\theta & -3\operatorname{sen}\phi \end{vmatrix} \\
&= \left(-9\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta, -9\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi, -9\cos\phi\operatorname{sen}\phi\right)
\end{aligned}$$

Para que a superfície tenha orientação para fora há que considerar o vetor normal

$$-\overrightarrow{N} = \left(9\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta, 9\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi, 9\cos\phi\operatorname{sen}\phi\right)$$

que "aponta para cima" no hemisfério norte (onde $\phi \in]0, \pi/2[$) e "aponta para baixo" no hemisfério sul (onde $\phi \in]\pi/2, \pi[$. O fluxo do campo $\mathbf{F}$ ao longo da superfície S é dado pelo integral de superfície

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot \nu \, dS &= \iint_D \big(0, 0, z(\theta, \phi)\big) \cdot \big(-\overrightarrow{N}(\theta, \phi)\big) \, d\theta \, d\phi \\
&= \iint_D (3\cos\phi)\,(9\cos\phi\operatorname{sen}\phi) \, d\theta \, d\phi \\
&= 27 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\cos^2\phi \, d\phi \, d\theta \\
&= 27 \cdot 2\pi \cdot \left.\frac{-\cos^3\phi}{3}\right|_0^{\pi} \;=\; 27 \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} \\
&= 36\pi.
\end{aligned}$$