# Cálculo Diferencial e Integral - III

## Exemplos de Resoluções

**Semana 13 - 18 a 21 de Dezembro de 2023**

1. Use o método de separação de variáveis para resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} & 0 < x < 1 \;,\; t > 0 \\ u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 2e^{-x}\mathrm{sen}\,(4\pi x) - 9e^{-x}\mathrm{sen}\,(7\pi x) & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

**Resolução:** A equação e as condições de fronteira são homogéneas. Podemos, por isso, construir novas soluções por combinações lineares arbitrárias de soluções da equação e das condições de fronteira homogéneas. Isto é o princípio da sobreposição.

Usamos então o método de separação de variáveis para construir soluções gerais por combinação linear (eventualmente infinita) de soluções mais simples, da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, para $0 < x < 1$ e $t > 0$. Substituindo na equação diferencial parcial obtemos

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) + 2X'(x)T(t) \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x) + 2X'(x)}{X(x)}.$$

Esta igualdade só é possivel se as funções dos dois lados da igualdade, de variáveis diferentes $x$ e $t$, forem ambas iguais a uma constante, digamos $\lambda$. Portanto é equivalente ao sistema seguinte, onde $\lambda$ é um número real qualquer

$$\begin{cases} T'(t) = \lambda T(t) \\ X''(x) + 2X'(x) = \lambda X(x). \end{cases}$$

A primeira equação é uma simples equação linear homogénea de primeira ordem para $T(t)$, cuja solução geral é

$$T(t) = Ae^{\lambda t} \text{ com } A \in \mathbb{R}.$$

A segunda equação pode ser escrita como

$$(D^2 + 2D - \lambda)X(x) = 0,$$

cujas raízes são $-1 \pm \sqrt{1+\lambda}$. Assim, dependendo do sinal de $1+\lambda$ temos

$$X(x) = \begin{cases} Be^{-x}e^{\sqrt{1+\lambda}\,x} + Ce^{-x}e^{-\sqrt{1+\lambda}\,x} & \text{se } \lambda > -1 \\ Bxe^{-x} + Ce^{-x} & \text{se } \lambda = -1 \\ Be^{-x}\cos(\sqrt{-1-\lambda}\,x) + Ce^{-x}\text{sen}\,(\sqrt{-1-\lambda}\,x) & \text{se } \lambda < -1. \end{cases}$$

onde $B, C$ são constantes reais.

As condições de fronteira homogéneas $u(0,t) = u(1,t) = 0$ para as soluções da forma $X(x)T(t)$ não nulas implicam que

$$X(0)T(t) = X(1)T(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(1) = 0 \end{cases}$$

Impondo estas condições às soluções $X(x)$ determinadas acima temos

(i) Para $\lambda > -1$:

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ Be^{-1}e^{\sqrt{1+\lambda}} + Ce^{-1}e^{-\sqrt{1+\lambda}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

(ii) Para $\lambda = -1$:

$$\begin{cases} C = 0 \\ Be^{-1} + Ce^{-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

(iii) Para $\lambda < -1$:

$$\begin{cases} B = 0 \\ Be^{-1}\cos\sqrt{-1-\lambda} + Ce^{-1}\text{sen}\,\sqrt{-1-\lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \text{ ou } \sqrt{-1-\lambda} = n\pi \end{cases}$$

donde obtemos os valores próprios $\lambda_n = -1 - n^2\pi^2$, com $n = 1, 2, 3, \ldots$, e as correspondentes funções próprias não nulas $X_n(x) = Ce^{-x}\,\text{sen}\,(n\pi x)$.

As soluções não triviais da equação diferencial da forma $X(x)T(t)$ que satisfazem as condições de fronteira são portanto as funções da forma

$$A\, e^{-x}\,\text{sen}\,(n\pi x)\, e^{(-1-n^2\pi^2)t}$$

com $A \in \mathbb{R}$ e $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Procuramos agora uma solução formal para a equação e condição inicial que seja uma "combinação linear infinita" das soluções obtidas acima:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-x}\,\text{sen}\,(n\pi x)\, e^{(-1-n^2\pi^2)t}.$$

Substituindo esta expressão na condição inicial $u(x,0) = 2e^{-x}\text{sen}\,(4\pi x) - 9e^{-x}\text{sen}\,(7\pi x)$ obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{-x}\,\text{sen}\,(n\pi x) = 2e^{-x}\text{sen}\,(4\pi x) - 9e^{-x}\text{sen}\,(7\pi x)$$

pelo que se conclui imediatamente que a série se resume à soma de dois termos apenas, com $n = 4$ e $n = 7$ e com os correspondentes coeficientes $c_4 = 2$ e $c_7 = -9$, e portanto a solução é

$$u(x,t) = 2e^{-x}\,\text{sen}\,(4\pi x)\, e^{(-1-16\pi^2)t} - 9e^{-x}\,\text{sen}\,(7\pi x)\, e^{(-1-49\pi^2)t}.$$

2. Usando o método de separação de variáveis, determine a solução do problema de valor inicial e valores na fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - e^{-2t}u - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & 0 < x < \pi \ , \ \ t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 4\cos\left(\dfrac{7x}{2}\right) - 2\cos\left(\dfrac{11x}{2}\right) & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

**Solução:** Observamos que a equação diferencial parcial dada, assim como as condições de fronteira, são homogéneas. É válido, por isso, o princípio da sobreposição, ou seja, funções obtidas por combinações lineares arbitrárias de soluções da equação e das condições de fronteira ainda as satisfazem.

Vamos por isso usar o método de separação de variáveis, construindo soluções gerais por combinação linear (eventualmente infinita) de soluções mais simples, da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, para $0 < x < \pi$ e $t > 0$. Substituindo na equação diferencial parcial obtemos

$$X(x)T'(t) - e^{-2t}X(x)T(t) - X''(x)T(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} - e^{-2t} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Esta igualdade só é possivel se as funções dos dois lados da igualdade, de variáveis diferentes $x$ e $t$, forem ambas iguais a uma constante, digamos $\lambda$. Portanto é equivalente ao sistema seguinte, onde $\lambda$ é um número real qualquer

$$\begin{cases} T'(t) = (\lambda + e^{-2t})T(t) \\ X''(x) - \lambda X(x) = 0. \end{cases}$$

A primeira equação é uma equação linear homogénea para $T(t)$, cuja solução geral é

$$T(t) = Ae^{\lambda t - \frac{e^{-2t}}{2}} \text{ com } A \in \mathbb{R}.$$

A expressão para as soluções da segunda equação depende do sinal de $\lambda$. Temos

$$X(x) = \begin{cases} Be^{\sqrt{\lambda}x} + Ce^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{se } \lambda > 0 \\ Bx + C & \text{se } \lambda = 0 \\ B\cos\sqrt{-\lambda}x + C\operatorname{sen}\sqrt{-\lambda}x & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$$

onde $B, C$ são constantes reais.

As condições de fronteira homogéneas $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = u(\pi,t) = 0$ para as soluções da forma $X(x)T(t)$ não nulas implicam que

$$X'(0)T(t) = X(\pi)T(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X'(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases}$$

Impondo estas condições às soluções $X(x)$ determinadas acima temos

(i) Para $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}B - \sqrt{\lambda}C = 0 \\ Be^{\sqrt{\lambda}\pi} + Ce^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

(ii) Para $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} B = 0 \\ B\pi + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

(iii) Para $\lambda < 0$:

$$\begin{cases} \sqrt{-\lambda}C = 0 \\ B\cos\sqrt{-\lambda}\pi + C\operatorname{sen}\sqrt{-\lambda}\pi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ B = 0 \text{ ou } \sqrt{-\lambda}\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases}$$

donde obtemos os valores próprios $\lambda_n = -(n+\frac{1}{2})^2$ negativos, com $n = 0, 1, 2, \cdots$, e as correspondentes funções próprias não nulas $X_n(x) = B\cos\big((n+\frac{1}{2})x\big)$.

As soluções não triviais da equação diferencial da forma $X(x)T(t)$ que satisfazem as condições de fronteira são portanto as funções da forma

$$A\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right) e^{-(\frac{2n+1}{2})^2 t - \frac{e^{-2t}}{2}}$$

com $A \in \mathbb{R}$ e $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Procuramos agora uma solução formal para a equação e condição inicial que seja uma "combinação linear infinita" das soluções obtidas acima:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right) e^{-(\frac{2n+1}{2})^2 t - \frac{e^{-2t}}{2}}.$$

Substituindo esta expressão na condição inicial $u(x,0) = 4\cos\left(\frac{7x}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{11x}{2}\right)$ obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right) e^{-\frac{1}{2}} = 4\cos\left(\frac{7x}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{11x}{2}\right)$$

pelo que se conclui imediatamente que a série se resume à soma de dois termos apenas, com $n = 3$ e $n = 5$ e com os correspondentes coeficientes a satisfazer as duas relações $a_3\, e^{-\frac{1}{2}} = 4$ e $a_5\, e^{-\frac{1}{2}} = -2$, donde

$$a_3 = 4\, e^{\frac{1}{2}} \qquad \text{e} \qquad a_5 = -2\, e^{\frac{1}{2}}$$

e portanto a solução é

$$u(x,t) = 4\cos\left(\frac{7}{2}x\right) e^{-\frac{49}{4}t - \frac{e^{-2t}-1}{2}} - 2\cos\left(\frac{11}{2}x\right) e^{-\frac{121}{4}t - \frac{e^{-2t}-1}{2}}.$$

3. Considere o prolongamento periódico, de período $2\pi$, da função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{se} \quad -\pi < x < 0. \end{cases}$$

(a) Determine a série de Fourier de $f$.

(b) Use o resultado da alínea anterior e o teorema da convergência pontual de séries de Fourier num ponto conveniente, para determinar a soma da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

**Resolução:**

(a) A série de Fourier da função $2\pi-$periódica $f$, é dada por (note que neste caso $L = \pi$)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx),$$

com os coeficientes dados pelos integrais

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \qquad n \geq 0$$

e

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx \qquad n > 0.$$

Para a função dada, temos apenas que calcular estes integrais:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1\, dx = 1, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx)\, dx = \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen}(nx)\Big|_0^{\pi} = 0 \qquad n > 0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\, dx = -\frac{1}{n\pi} \cos(nx)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi}(1 - \cos(n\pi)) \\ &= \frac{1}{n\pi}(1 - (-1)^n) \qquad n > 0. \end{aligned}$$

Os coeficientes $b_n$ claramente anulam-se quando $n$ é par, e portanto a série de Fourier de $f$ é assim dada por

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen}((2n+1)x).$$

(b) Se fizermos $x = \pi/2$, na série de Fourier obtida na alínea anterior, facilmente observamos que o argumento do seno serão apenas múltiplos ímpares de $\pi/2$,

$$\operatorname{sen}\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n.$$

A série de Fourier fica assim

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1},$$

que, aparte do factor $2/\pi$ e do $1/2$ é exactamente o que é pedido na pergunta.

Pelo teorema da convergência de séries de Fourier para funções seccionalmente $C^1$, sabemos que em cada ponto $x \in \mathbb{R}$ onde $f$ seja contínua, a série converge para $f(x)$. A função $f$ desta pergunta é, de facto, seccionalmente $C^1$ porque é constante em $]-\pi, 0[$ e em $[0, \pi]$, pelo que é infinitamente diferenciável no interior destes intervalos e tem limites (óbvios) finitos nos extremos. É também contínua no ponto $x = \pi/2$ onde vale $f(\pi/2) = 1$. Pelo que se tem

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 \;\Rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

4. Considere a seguinte equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 0.$$

(a) Determine uma solução estacionária (que não depende do tempo) $u_e(x)$, desta equação, satisfazendo as condições de fronteira $u_e(0) = 1$, $u_e(\pi/2) = 0$.

(b) Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o problema de valor inicial e fronteira (não estacionário), para a equação dada, com as condições

$$\begin{cases} u(0,t) = 1 & t > 0, \quad x = 0 \\ u(\pi/2, t) = 0 & t > 0, \quad x = \frac{\pi}{2} \\ u(x, 0) = 2\cos x & t = 0, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(**Sugestão:** Escreva a solução na forma $u = v + u_e$ e resolva o problema para $v$, utilizando a alínea anterior para estabelecer as novas condições inicial e de fronteira).

**Resolução:**

(a) Uma solução estacionária verificará a equação diferencial ordinária

$$u_e''(x) + u_e = 0.$$

O polinómio característico associado é $R^2 + 1$, que tem como raízes $\pm i$, pelo que a solução geral é

$$u_e(x) = A\cos x + B\operatorname{sen} x.$$

Pelas condições de fronteira, conclui-se que $A = 1$ e $B = 0$, e como tal

$$u_e(x) = \cos x.$$

(b) Como sugerido, considere-se

$$u(x,t) = u_e(x) + v(x,t)$$

onde $u_e(x) = \cos x$, determinada em (a). O que estamos a fazer, evidentemente, é a decompor a solução na soma de uma solução particular do problema com condições de fronteira não homogéneas, obtida na alínea anterior, com a solução $v(x,t)$ homogénea. Assim, $v(x,t)$ é solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v = 0 \\ v(0,t) = 0\ ,\ v(\frac{\pi}{2},t) = 0 \\ v(x,0) = u(x,0) - u_e(x) = \cos x. \end{cases}$$

Houve que subtrair, à condição inicial geral, a componente da solução particular das condições de fronteira não homogéneas, ou seja, a solução estacionária $u_e(x)$.

Para determinar $v(x,t)$, correspondente a uma equação e a condições de fronteira homogéneas, usaremos agora o método da separação de variáveis, isto é, procura-se soluções não nulas da forma $v(x,t) = X(x)T(t)$. Derivando em ordem a $t$ e a $x$, substituindo na equação e dividindo por $XT$, obtem-se

$$\frac{T'(t)}{T(t)} - 1 = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Atendendo a que o primeiro membro é uma função de $t$, e o segundo é uma função de $x$, a igualdade só se verificará se existir uma constante $\lambda$ para a qual

$$\frac{T'(t)}{T(t)} - 1 = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Por outro lado, pelas condições de fronteira $v(0,t) = v(\frac{\pi}{2},t) = 0$, e atendendo a que $T(t)$ não pode ser a função identicamente nula, obtem-se $X(0) = X(\frac{\pi}{2}) = 0$. Tem-se então que $X$ é a solução do problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

Para que $X$ não seja identicamente nula, teremos que considerar $\lambda < 0$. Nesse caso

$$X(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\text{sen}\,(\sqrt{-\lambda}x)$$

e para que as condições de fronteira sejam verificadas

$$A = 0 \quad \text{e} \quad B\text{sen}\left(\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Mais uma vez para que $X(x) \not\equiv 0$, há que verificar-se $\lambda = -4n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Sendo assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, obtem-se

$$X_n(x) = B_n\text{sen}\,(2nx)$$

e a solução da equação diferencial $\frac{T'(t)}{T(t)} = 1 - 4n^2$ é

$$T_n(t) = C_n e^{(1-4n^2)t}$$

Tem-se então, que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$v_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = A_n \text{ sen}\,(2nx)\; e^{(1-4n^2)t}$$

é solução do problema de valores na fronteira. Construimos agora a solução geral por "sobreposição infinita" destas soluções,

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}\,(2nx)\; e^{(1-4n^2)t}.$$

Para determinar finalmente os coeficientes $A_n$ teremos que utilizar a condição inicial

$$\cos x = v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}\,(2nx)$$

pelo que se conclui que as constantes $A_n$ são precisamente os coeficientes do desenvolvimento em série de senos da função $f(x) = \cos x$ no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Visto que $f$ é uma função contínua, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\,(2nx)$$

com

$$b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \text{ sen}\,(2nx) dx$$

Usando a igualdade $\text{sen}\, a \cos b = \frac{1}{2}(\text{sen}\,(a+b) + \text{sen}\,(a-b))$, tem-se que (também pode calcular o integral de $b_n$ fazendo duas integrações por partes seguidas, ou ainda escrevendo o seno e coseno com recurso a exponenciais complexas)

$$b_n = \frac{2}{\pi}\Big( -\frac{1}{2n+1}\cos\big((2n+1)x\big)\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2n-1}\cos\big((2n-1)x\big)\Big|_0^{\pi/2}\Big) = \frac{8n}{\pi(4n^2-1)}.$$

Como consequência

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{\pi(4n^2-1)} \text{sen}\,(2nx)\; e^{(1-4n^2)t}$$

e

$$u(x,t) = u_e(x) + v(x,t) = \cos x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{\pi(4n^2-1)} \text{sen}\,(2nx)\; e^{(1-4n^2)t}.$$

5. (a) Determine o desenvolvimento em série de Fourier de senos de $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \le x \le \pi/2 \\ 0 & \text{se} \quad \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$$

e indique, justificando, a soma da série para cada $x \in \mathbb{R}$.

(b) Use o método de separação de variáveis para resolver o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < \pi \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \ge 0 \\ u(x,0) = 0 \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f(x) & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

**Resolução:**

(a) Para obter um desenvolvimento de Fourier em série de senos, prolonga-se $f$ ao intervalo $[-\pi, 0[$ de forma ímpar e obtém-se assim a sua série de Fourier,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

em que $L = \pi$ e os coeficientes $b_n$ são dados por

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(nx)dx = -\frac{2}{\pi n}\cos(nx)\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{\pi n}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right]. \end{aligned}$$

Assim a série de Fourier de senos de $f$ é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}\left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] \operatorname{sen}(nx).$$

Como o prolongamento ímpar de $f$, em $[-\pi, \pi]$, é seccionalmente $C^1$, com descontinuidades em $x = 0$ e $x = \pm\pi/2$, o teorema da convergência pontual das séries de Fourier garante que a correspondente série de senos converge, em cada $x \in [-\pi, \pi]$, para

$$\begin{cases} 0 & \text{se} & -\pi \le x < -\pi/2 \\ -1/2 & \text{se} & x = -\pi/2 \\ -1 & \text{se} & -\pi/2 < x < 0 \\ 0 & \text{se} & x = 0 \\ 1 & \text{se} & 0 < x < \pi/2 \\ 1/2 & \text{se} & x = \pi/2 \\ 0 & \text{se} & \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$$

Nos restantes pontos de $x \in \mathbb{R}$ a série converge para o prolongamento periódico, de período $2\pi$, desta função.

(b) Observamos que a equação diferencial parcial dada, assim como as condições de fronteira, são homogéneas. É válido, por isso, o princípio da sobreposição, ou seja, funções obtidas por combinações lineares arbitrárias de soluções da equação e das condições de fronteira ainda as satisfazem.

Vamos por isso usar o método de separação de variáveis, construindo soluções gerais por combinação linear (eventualmente infinita) de soluções mais simples, da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$, para $0 \leq x \leq \pi$ e $t \geq 0$. Substituindo na equação diferencial parcial obtemos

$$T''(t)X(x) - 2T(t)X(x) = T(t)X''(x) \Leftrightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} - 2 = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Esta igualdade só é possivel se as funções dos dois lados da igualdade, de variáveis independentes $x$ e $t$, forem ambas iguais a uma constante, digamos $\lambda$. Portanto é equivalente ao seguinte sistema de EDOs, onde $\lambda$ é um número real qualquer

$$\begin{cases} T''(t) = (\lambda+2)T(t) \\ X''(x) = \lambda X(x). \end{cases}$$

Começamos pelo problema de valores e funções próprias da segunda derivada, correspondente à equação para $X$. A expressão para as suas soluções depende do sinal de $\lambda$. Temos $X''(x) = \lambda X(x) \Leftrightarrow X''(x) - \lambda X(x) = 0 \Leftrightarrow (D^2 - \lambda)X(x) = 0$, donde

$$X(x) = \begin{cases} Be^{\sqrt{\lambda}x} + Ce^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{se } \lambda > 0 \\ Bx + C & \text{se } \lambda = 0 \\ B\cos\sqrt{-\lambda}x + C\operatorname{sen}\sqrt{-\lambda}x & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$$

onde $B, C$ são constantes reais.

As condições de fronteira homogéneas $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ para as soluções da forma $T(t)X(x)$ não nulas dizem que

$$T(t)X(0) = T(t)X(\pi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases}$$

Impondo estas condições às soluções $X(x)$ determinadas acima temos

(i) Para $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ Be^{\sqrt{\lambda}\pi} + Ce^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

(ii) Para $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} C = 0 \\ B\pi + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

(iii) Para $\lambda < 0$:

$$\begin{cases} B = 0 \\ B\cos(\sqrt{-\lambda}\pi) + C\operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \text{ ou } \sqrt{-\lambda}\pi = n\pi \end{cases}$$

donde obtemos as soluções não nulas $X(x) = C\operatorname{sen}(nx)$ com $n = 1, 2, \cdots$, para $\lambda = -n^2$.

Para resolver a equação $T''(t)-(\lambda+2)T(t)=0 \Leftrightarrow T''(t)+(n^2-2)T(t)=0 \Leftrightarrow (D^2+(n^2-2))T(t)=0$ há que observar que, para $n=1$ a solução desta EDO de segunda ordem tem duas soluções exponenciais linearmente independentes, e para $n \geq 2$ as soluções são trigonométricas. Assim para $n=1$, a equação é $T''(t)-T(t)=0$ cuja solução geral é

$$T(t)=a_1e^t+b_1e^{-t},$$

enquanto para $n \geq 2$ a solução é

$$T(t)=a_n\cos(\sqrt{n^2-2}\ t)+b_n\mathrm{sen}\,(\sqrt{n^2-2}\ t).$$

As soluções não triviais da equação diferencial da forma $T(t)X(x)$ que satisfazem as condições de fronteira são portanto as funções da forma

$$a_1e^t\mathrm{sen}\,(x)+b_1e^{-t}\mathrm{sen}\,(x),$$

para $n=1$, e

$$a_n\cos(\sqrt{n^2-2}\ t)\mathrm{sen}\,(nx)+b_n\mathrm{sen}\,(\sqrt{n^2-2}\ t)\mathrm{sen}\,(nx),$$

para $n \geq 2$.

Procuramos agora uma solução formal para a equação e condição inicial que seja uma "combinação linear infinita"destas soluções obtidas acima:

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\ a_1e^t\mathrm{sen}\,(x)+b_1e^{-t}\mathrm{sen}\,(x)+\\&+\sum_{n=2}^{\infty}a_n\cos(\sqrt{n^2-2}\ t)\mathrm{sen}\,(nx)+b_n\mathrm{sen}\,(\sqrt{n^2-2}\ t)\mathrm{sen}\,(nx).\end{aligned}$$

Substituindo esta expressão na condição inicial $u(x,0)=0$ obtemos

$$(a_1+b_1)\mathrm{sen}\,(x)+\sum_{n=2}^{\infty}a_n\mathrm{sen}\,(nx)=0,$$

e como os coeficientes de Fourier da função nula são nulos, concluímos que

$$a_1+b_1=0 \Leftrightarrow a_1=-b_1,$$

e

$$a_n=0, \qquad \text{para} \quad n \geq 2.$$

Por outro lado, derivando a série da solução em ordem a $t$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=a_1e^t\mathrm{sen}\,(x)-b_1e^{-t}\mathrm{sen}\,(x)+\\&+\sum_{n=2}^{\infty}-\sqrt{n^2-2}\ a_n\mathrm{sen}\,(\sqrt{n^2-2}\ t)\mathrm{sen}\,(nx)+\sqrt{n^2-2}\ b_n\cos(\sqrt{n^2-2}\ t)\mathrm{sen}\,(nx),\end{aligned}$$

e substituindo na condição inicial para a derivada $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=f(x)$ obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=(a_1-b_1)\mathrm{sen}\,(x)++\sum_{n=2}^{\infty}\sqrt{n^2-2}\;b_n\mathrm{sen}\,(nx)=f(x),$$

donde, pelos coeficientes da série de Fourier de senos de $f$ obtida na alínea anterior se conclui que

$$a_1-b_1=\frac{2}{\pi}$$

e

$$\sqrt{n^2-2}\;b_n=\frac{2}{\pi n}\left[1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right],$$

para $n\geq 2$, pelo que se conclui finalmente que

$$a_1=\frac{1}{\pi},\qquad b_1=-\frac{1}{\pi},$$

e

$$a_n=0,\qquad b_n=\frac{2}{\pi n\sqrt{n^2-2}}\left[1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right],$$

para $n\geq 2$, e portanto a solução é finalmente dada por

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\mathrm{senh}\,(t)\mathrm{sen}\,(x)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{\pi n\sqrt{n^2-2}}\left[1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]\mathrm{sen}\,(\sqrt{n^2-2}\;t)\mathrm{sen}\,(nx).$$