Cálculo Diferencial e Integral - III

Exemplos de Resoluções

Semana 12 - 11 a 15 de Dezembro de 2023

1. Considere a seguinte equação linear de terceira ordem

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = h(t). \tag{1}$$

(a) Determine a solução geral da equação homogénea associada.
(**Sugestão:** e^t é uma solução).

(b) Determine a solução do problema de valor inicial dado por (1) com $h(t) = 10\,e^t$ e verificando $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Resolução:

(a) Em termos do operador de derivação $D = \frac{d}{dt}$, a equação de terceira ordem homogéna, correspondente à que é dada, pode ser escrita como

$$(D^3 - D^2 + 4D - 4)y = 0.$$

A sugestão, de que e^t é uma das soluções da equação homogénea, significa que $\lambda = 1$ é uma das três raízes do correspondente polinómio característico $\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4$, pelo que dividindo-o por $\lambda - 1$, se pode então obter a factorização

$$(D - 1)(D^2 + 4)y = 0.$$

Conclui-se finalmente que as três raízes do polinómio característico são então $\lambda = 1$, dada na sugestão, e $\lambda = \pm 2i$. Sabendo que o conjunto das soluções da equação homogénea é um espaço vectorial de dimensão três, podemos obtê-lo com recurso a uma base de três soluções linearmente independentes, associadas às três raízes. São elas e^t, $\cos(2t)$ e $\mathrm{sen}\,(2t)$, estas duas últimas sendo as partes real e imaginária das correspondentes exponenciais complexas associadas às duas raízes imaginárias puras, conjugadas. Por combinação linear arbitrária obtém-se assim a solução geral (real) da correspondente equação homogénea:

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 \cos(2t) + c_3 \mathrm{sen}\,(2t), \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

(b) Sabemos que a solução geral da equação não homogénea é dada somando a uma solução particular todas as soluções da homogénea correspondente:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t),$$

sendo que a parte homogénea já foi obtida na alínea anterior. Quanto a uma solução particular, vamos determiná-la pelo método dos polinómios aniquiladores e dos coeficientes indeterminados, visto o termo não homogéneo $10e^t$ ser solução da equação $(D-1)y = 0$. Pelo que aplicando o operador $(D-1)$ aos dois lados da equação não homogénea dada, aniquilamos o termo não homogéneo e transformamo-la numa nova equação homogénea com um conjunto maior de soluções:

$$(D-1)^2(D^2+4)y = 0.$$

As soluções desta nova equação homogéna são da forma

$$c_1e^t + c_2\cos(2t) + c_3\mathrm{sen}\,(2t) + \alpha te^t.$$

sendo que a última função nesta combinação linear, te^t, resulta da multiplicidade algébrica igual a dois da raíz $\lambda = 1$. As três primeiras parcelas correspondem à solução geral da equação homogénea original, pelo que é o coeficiente α deste novo termo que é necessário determinar especificamente para se obter a solução particular do problema não homogéneo dado.

Assim, fazemos $y_p(t) = \alpha te^t$ e temos

$$\begin{aligned} y_p''' - y_p'' + 4y_p' - 4y_p &= 10e^t \Leftrightarrow \\ \alpha(3+t)e^t - \alpha(2+t)e^t + 4\alpha(1+t)e^t - 4\alpha te^t &= 10e^t \Leftrightarrow \\ 3\alpha - 2\alpha + 4\alpha &= 10, \end{aligned}$$

donde finalmente se obtém $\alpha = 2$.

A solução do geral do problema não homogéneo é então dada por

$$y(t) = y_h(t) + 2te^t = c_1e^t + c_2\cos(2t) + c_3\mathrm{sen}\,(2t) + 2te^t,$$

com constantes reais c_1, c_2, c_3, que agora determinamos de modo a satisfazer as condições iniciais especificadas. Assim

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &\Leftrightarrow c_1 + c_2 = 0 \\ y'(0) = 0 &\Leftrightarrow c_1 + 2c_3 + 2 = 0 \\ y''(0) = 0 &\Leftrightarrow c_1 - 4c_2 + 4 = 0. \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema algébrico simples de três equações e três incógnitas, chega-se a $c_1 = -4/5$, $c_2 = 4/5$ e $c_3 = -3/5$, pelo que a (única) solução do pvi é

$$y(t) = -\frac{4}{5}e^t + \frac{4}{5}\cos(2t) - \frac{3}{5}\mathrm{sen}\,(2t) + 2te^t.$$

2. Considere a equação diferencial

$$y'' - 2y' + 2y = h(t).$$

(a) Determine a solução geral da equação homogénea associada.

(b) Para que condições iniciais $y(0) = \alpha$, $y'(0) = \beta$ tem a equação homogénea solução limitada?

(c) Sendo $h(t) = 4t + 6e^{2t}$ determine a solução da equação que verifica $y(0) = y'(0) = 0$.

(d) Determine a solução geral da equação para $h(t) = \frac{e^t}{\cos t}$.

Resolução:

(a) A equação homogénea é

$$(D^2 - 2D + 2)y = 0.$$

O polinómio característico é $P(R) = R^2 - 2R + 2$, e as suas raizes são $R = 1 \pm i$. Assim, a solução geral da equação homogénea é:

$$y_H(t) = Ae^t \cos t + Be^t \operatorname{sen} t.$$

(b) Em face da solução geral homogénea, da alínea anterior, a solução do problema de valor inicial homogéneo com condições iniciais $y(0) = \alpha$, $y'(0) = \beta$ é

$$y(0) = A = \alpha \qquad \text{e} \qquad y'(0) = A + B = \beta,$$

ou seja

$$y(t) = \alpha e^t \cos t + (\beta - \alpha)e^t \operatorname{sen} t.$$

Ora, em face do termo exponencial nas duas componentes da solução homogénea, a única forma desta solução ser limitada é os dois coeficientes serem nulos, ou seja, $\alpha = 0$ e $\beta - \alpha = 0$, donde se conclui, necessariamente, $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

(c) A equação

$$y'' - 2y' + 2y = h(t) = 4t + 6e^{2t} \tag{2}$$

pode ser resolvida pelo método dos coeficientes indeterminados.

O polinómio aniquilador de $h(t) = 4t + 6e^{2t}$ é $P_A(D) = D^2(D - 2)$. Aplicando $P_A(D)$ a ambos os membros da equação (2):

$$D^2(D-2)(D-1-i)(D-1+i)y = D^2(D-2)\left(4t + 6e^{2t}\right) = 0 \tag{3}$$

As raizes do polinómio característico da equação homogénea (3) são $1 \pm i$ (com multiplicidade 1 cada), 0 (com multiplicidade 2) e 2 (com multiplicidade 1). Consequentemente, a solução geral da equação (3) é:

$$y(t) = \underbrace{Ae^t \cos t + Be^t \operatorname{sen} t}_{y_H(t)} + \underbrace{C + Dt + Ee^{2t}}_{y_P(t)}$$

Dado que $y_H(t)$ representa a solução geral da equação homogénea associada a (2), conclui-se que (2) tem uma solução particular da forma $y_P(t) = C + Dt + Ee^{2t}$. Substituindo y_P na equação diferencial obtém-se:

$$4Ee^{2t} - 2D - 4Ee^{2t} + 2C + 2Dt + 2Ee^{2t} = 4t + 6e^{2t},$$

ou seja

$$(2C - 2D) + 2Dt + 2Ee^{2t} = 4t + 6e^{2t},$$

para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Desta forma, $C = D = 2$ e $E = 3$.

A solução geral da equação (2) é:

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = Ae^t \cos t + Be^t \operatorname{sen} t + 2 + 2t + 3e^{2t}$$

Como $y'(t) = Ae^t \cos t - Ae^t \operatorname{sen} t + Be^t \operatorname{sen} t + Be^t \cos t + 2 + 6e^{2t}$, resulta que:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + 2 + 3 = 0 \\ A + B + 2 + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -5 \\ B = -3 \end{cases}$$

Assim, a solução do problema de valor inicial é:

$$y(t) = -5e^t \cos t - 3e^t \operatorname{sen} t + 2 + 2t + 3e^{2t}$$

(d) Para determinar uma solução particular da equação

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{e^t}{\cos t} \tag{4}$$

podemos utilizar a fórmula de variação das constantes.

Atendendo ao resultado da alínea (a), uma matriz wronskiana é dada por:

$$W(t) = \begin{bmatrix} e^t \cos t & e^t \operatorname{sen} t \\ e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t & e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ \cos t - \operatorname{sen} t & \operatorname{sen} t + \cos t \end{bmatrix}$$

A sua inversa é, então:

$$W^{-1}(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t + \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t - \cos t & \cos t \end{bmatrix}$$

Desta forma:

$$\begin{aligned} y_P(t) &= \begin{bmatrix} e^t \cos t & e^t \operatorname{sen} t \end{bmatrix} \int^t e^{-s} \begin{bmatrix} \operatorname{sen} s + \cos s & -\operatorname{sen} s \\ \operatorname{sen} s - \cos s & \cos s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^s}{\cos s} \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} e^t \cos t & e^t \operatorname{sen} t \end{bmatrix} \int^t \begin{bmatrix} -\frac{\operatorname{sen} s}{\cos s} \\ 1 \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} e^t \cos t & e^t \operatorname{sen} t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \log |\cos t| \\ t \end{bmatrix} \\ &= e^t \cos t \log |\cos t| + te^t \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

A solução geral da equação (4) é, então:

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = Ae^t \cos t + Be^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t \log |\cos t| + te^t \operatorname{sen} t.$$