A EXTRAORDINÁRIA INFLUÊNCIA DE FOURIER NO DESENVOLVIMENTO DA ANÁLISE MATEMÁTICA

JORGE DRUMOND SILVA

1. Introdução

É habitual, no ensino das disciplinas horizontais de matemática para os primeiros anos de cursos universitários de engenharias e ciências - normalmente denominadas de Cálculos, ou Análises Matemáticas - que um dos últimos capítulos, da última dessa sequência de disciplinas, seja dedicado ao método de separação de variáveis e séries de Fourier para resolução de problemas de valor inicial e fronteira das principais equações diferenciais parciais: calor, onda e Laplace. No entanto, passa despercebido aos alunos, e talvez também a muitos dos professores, o facto histórico surpreendente que essas ideias, que Joseph Fourier desenvolveu no início do século XIX para o estudo do problema da evolução da temperatura em sólidos através da resolução da equação do calor, aparentemente muito restritas ao campo das equações diferenciais parciais aplicadas a problemas da física, tiveram na realidade um papel absolutamente central e fundador na formulação rigorosa de quase todos os conceitos da análise matemática que os alunos aprendem até esse ponto, desde o integral de Riemann, passando pela teoria de conjuntos e começando na própria definição do conceito de função. É um pouco dessa história, da notável influência que o trabalho de Fourier teve na génese da moderna análise matemática, que pretendemos apresentar neste texto. Para uma exaustiva história das séries de Fourier, com mais profundidade técnica e incluindo passagens de alguns dos textos originais, recomenda-se vivamente a primeira metade de [2] escrita por Jean-Pierre Kahane.

2. Antes de Fourier

Começamos pela música. Platão considerava a música como uma das partes da matemática, gémea da astronomia, e para ambas a palavra harmonia era perfeitamente adequada: o som harmónico para os ouvidos, e os movimentos harmónicos celestiais para os olhos. Aliás, a *musica universalis*, ou harmonia das esferas, era um princípio filosófico que associava aos movimentos celestiais uma forma de música. Os sons puros correspondiam a circunferências perfeitas. O próprio modelo planetário ptolemaico consistia numa sobreposição de movimentos circulares, o deferente e o epiciclo, portanto numa decomposição harmónica. Esta é a origem da utilização da palavra *harmónico*, na física e matemática.

O estudo matemático do som e das vibrações cedo se impôs como tema central de investigação entre os físicos e matemáticos do século XVIII, logo após o desenvolvimento inicial da mecânica newtoniana, no final do século anterior. Brook Taylor, no seu tratado de 1713 *De Methodo Incrementorum*, onde apresenta a famosa fórmula da série com o seu nome, tem todo um capítulo dedicado ao estudo da vibração fundamental duma corda, onde conclui que o raio de curvatura duma corda vibrante é proporcional ao inverso do seu deslocamento relativamente à posição de repouso. No fundo, a solução da equação $y'' = -\alpha y$. A insuficiente notação da altura, onde ainda nem sequer era usado um símbolo ou expressão para senos e cosenos, impediu Taylor de obter a resolução completa e explícita do problema, em particular da relação entre a constante de proporcionalidade α, e os dados físicos como o comprimento da corda e as condições de fronteira. Ainda assim, passou a ser conhecido que os tons harmónicos de vibração duma corda dum instrumento musical correspondiam à curva que, na altura, era designada como a *socia trochoidis*, ou seja, a companheira da trocóide, que hoje chamamos de sinusóide, gráfico das funções seno e coseno.

É importante notar que o cálculo diferencial do século XVII, desenvolvido por Newton e Leibniz, focava-se em curvas geométricas como objetos de estudo. A palavra *função* é usada pela primeira vez por Leibniz, em 1692, para designar a dependência de certos conceitos geométricos, como a tangente ou o raio de curvatura, relativamente à curva em questão. No entanto, a influência das ideias revolucionárias de Descartes, na criação da álgebra simbólica e da geometria analítica, fazia-se cada vez mais sentir com a crescente utilização de variáveis (dependentes e independentes), fórmulas e equações. A necessidade de criar uma designação para a forma como uma curva geométrica poderia ser descrita por uma fórmula envolvendo uma variável levou Johann Bernoulli, em 1718, na sua correspondência com Leibniz, a escrever:

> Chamamos aqui função de uma variável a uma quantidade composta, de forma arbitrária, por constantes e por essa variável.

Claro que ficou por definir exatamente o sentido da expressão *composta de forma arbitrária* mas esta terá sido a primeira definição, mesmo que muito vaga, do conceito moderno de função de uma variável, dada por uma fórmula.

Foi Leonhard Euler o principal responsável, ao longo do século XVIII, por gradualmente substituir o ponto de vista geométrico pelo estudo de funções, no sentido de equações e fórmulas explícitas relacionando a variável dependente y com a independente x, como os objetos centrais da análise matemática. Em particular o seu tratado *Introductio in Analysin Infinitorum*, de 1748, tornou-se a referência incontornável da análise infinitesimal da época, na qual o estudo de funções assume um papel fundamental , as quais ele define como *expressões analíticas duma variável* - sem realmente definir o que são expressões analíticas - descritas de forma quase exclusivamente algébrica e sem recurso a figuras geométricas. Durante muitas décadas, no entanto, os dois pontos de vista, o geométrico e o analítico, foram usados paralelamente e, como veremos de seguida, isso foi motivo de profundas controvérsias motivadas por conceções distintas do significado de função, com propriedades e possibilidades de aplicação que se assumiam serem diferentes.

Euler foi aluno de Johann Bernoulli e amigo próximo do seu filho, Daniel Bernoulli. O seu primeiro trabalho foi a dissertação *Physica de Sono*, completada em 1726, que mais uma vez se focava no estudo do som. Ao longo da primeira metade do século XVIII, Euler e Daniel Bernoulli tentaram prosseguir os estudos da vibração fundamental duma corda, iniciados por Taylor, e continuados por Johann Bernoulli, considerando modelos com um número finito de massas ligadas por cordas sem massa, e passando esse número a infinito (as passagens a limites infinitos, ou de somas finitas a séries, eram feitas naturalmente sem qualquer preocupação de rigor, nessa época). Em linha com Taylor, concluíram que as vibrações eram harmónicas, da forma $u(x,t) = \operatorname{sen}(\alpha x)\cos(\beta t)$, mas não conseguiam obter a unicidade dos parâmetros α e β em termos dos dados físicos do problema. Na verdade procuravam, mas não conseguiam, provar que o movimento arbitrário duma corda consistia apenas de vibrações fundamentais e persistiam no erro, tal como Taylor também antes tinha feito, de assumir que fisicamente, por efeito de dissipação e atrito, mesmo que existissem vibrações sobrepostas, uma corda tendia sempre para uma vibração principal: aquela que era, por exemplo, escutada no som duma corda solta de um instrumento. Isto apesar de vários estudiosos de música, como Rameau, terem o conhecimento já na altura que, além da frequência fundamental, o som duma corda era composto pela sobreposição de vários harmónicos, com frequências múltiplas inteiras da fundamental.

Em 1747, D'Alembert submete à academia de Berlim o seu famoso artigo em que deduz a equação diferencial parcial que descreve a vibração duma corda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

(seria Euler, em 1766, nos seus estudos em hidrodinâmica, a deduzir a correspondente equação das ondas a três dimensões) e com o propósito explícito de mostrar que o movimento vibratório duma corda tinha uma diversidade infinita de soluções para além da *companheira da trocóide*, conclui, por integração da equação diferencial, que a sua solução geral é da forma $u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$, com as funções ϕ e ψ obtidas a partir da posição e velocidade arbitrárias da corda em $t = 0$. Euler, no ano imediatamente seguinte, em 1748, e estudando o mesmo problema, conclui que, para uma corda com posição inicial $f(x)$ e velocidade nula em $t = 0$, a sua evolução é dada por $u(x,t) = \frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{1}{2}f(x-ct)$. Surpreendentemente, apesar do que pareceria ser o facto de ambos terem chegado à mesma conclusão, na realidade torna-se o motivo duma intensa e longa discussão entre os dois. A razão: tinham em mente diferentes conceitos de função para as suas soluções. Enquanto D'Alembert, já muito meticuloso à época com questões de rigor, alegava que só faria sentido considerar *funções contínuas*, como eram designadas na altura as que eram definidas globalmente por uma única fórmula explícita ou expressão analítica, Euler argumentava que as soluções com significado físico deveriam ser baseadas em *funções geométricas ou descontínuas*, mais gerais, pois eram curvas que podiam até não ter correspondência com qualquer fórmula, eventualmente desenhadas à mão livre, ou que pudessem ser seccionalmente dadas por fórmulas diferentes (fazendo lembrar um pouco um tipo de dúvida que também se encontra habitualmente entre alunos recém chegados à universidade, quando tentam distinguir funções definidas por ramos como sendo de alguma forma diferentes de funções dadas por uma única fórmula). Contribuindo para a confusão, naquela época achava-se que qualquer função dada por uma fórmula explícita era infinitamente diferenciável, possível de ser expandida na sua série de Taylor e que, caso fosse conhecida num subintervalo do seu domínio, então a função seria necessariamente dada em todo o domínio pela mesma fórmula. No fundo, estava-se a assumir que as denominadas *funções contínuas* tinham as propriedades que modernamente associamos a funções analíticas. Euler concordava com estes princípios e por isso, para poder considerar situações físicas com formas de vibração realmente gerais, por exemplo para descrever a propagação de choques observados experimentalmente por Daniel Bernoulli, insistia que as suas soluções teriam que ser dadas por *funções geométricas*. D'Alembert contrapunha que as soluções da equação diferencial das ondas teriam de ter segunda derivada finita em todos os pontos e portanto necessariamente dadas por uma única fórmula em todo o domínio.

Em 1753, argumentando fisicamente, e na sequência dos seus estudos experimentais de vibração de cordas, Daniel Bernoulli propôs que a solução mais geral possível, portanto incluindo as de D'Alembert e Euler, deveria ser dada pela sobreposição da vibração fundamental com todos os seus harmónicos de frequências múltiplas inteiras que, para uma corda começando em repouso, corresponderia à série

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right),$$

a qual, em $t = 0$, daria a forma inicial da corda $f(x)$ através duma série de senos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Esta é a primeira vez que foi avançada a ideia duma função arbitrária ser representada por uma série trigonométrica, mas Bernoulli não a conseguia justificar matematicamente, nem obter os coeficientes a_n a partir de f, pelo que foi sujeito a críticas por parte de Euler e D'Alembert. Euler, como se viu, desde logo achava que fórmulas explícitas, as *funções contínuas* como as propostas por D'Alembert, não eram suficientes para representar a generalidade de formas de cordas vibrantes e daí defender que teriam de ser *funções geométricas*, mais gerais. Por maioria de razão, uma fórmula explícita particular, dada exclusivamente por uma somatório de senos, argumentava Euler, só poderia ser periódica e ímpar, pelo que naturalmente estaria ainda mais longe de corresponder a uma configuração arbitrária (mais uma vez denunciando, com este argumento, o erro de assumir que se duas funções coincidissem num subintervalo teriam que necessariamente ser dadas pelas mesmas fórmulas em todo o domínio - a série de Bernoulli não poderia assim, por exemplo, representar uma secção da condição inicial que fosse reta num subintervalo). Já D'Alembert cometia o erro de assumir que, se os senos eram infinitamente diferenciáveis, então a sua soma também o seria, pelo que a série trigonométrica de Bernoulli com certeza não poderia representar as curvas geométricas, por secções, que Euler defendia. Conceitos rigorosos de convergência de sucessões e séries ainda não existiam, é claro, e, tal como o conceito moderno de função contínua num ponto, só viriam a ser desenvolvidos no séc XIX, por Cauchy. É difícil hoje em dia, contudo, entender completamente os argumentos e os pontos de vista defendidos pelos intervenientes nesta famosa discussão, visto que muitas vezes contradiziam-se. O próprio Euler, em carta enviada a Goldbach em 1744, usava a identidade $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$ o que, à luz dos argumentos posteriormente usados por ele contra a série trigonométrica de Bernoulli, parece ser duma extrema incoerência.

Em 1759, um jovem Joseph-Louis Lagrange em início de carreira decide também estudar o mesmo problema da vibração duma corda, mas com o propósito de se posicionar ao lado de Euler, na disputa contra D'Alembert e Bernoulli. Para justificar a solução de Euler, com um argumento a seu ver mais rigoroso e logicamente sólido, Lagrange decide desenvolver um método de interpolação de curvas geométricas arbitrárias, considerando um número finito de pontos sobre elas. A ideia era obter uma fórmula explícita, ou seja, uma *função contínua*, que aproximasse qualquer curva geométrica tanto melhor quanto maior o número de pontos usados na interpolação. Fazendo o número de pontos tender para infinito, Lagrange chegou à fórmula

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{2}{L} \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) f(y) dy \\ + \frac{2}{c\pi} \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{cn\pi t}{L}\right) g(y) dy, \end{aligned}$$

para o problema com posição inicial f e velocidade vertical inicial g. O que é absolutamente notável é quão perto Lagrange esteve de obter o desenvolvimento das condições iniciais em séries de senos, com os correspondentes coeficientes de Fourier: ter-lhe-ia bastado, em $t = 0$, trocar os somatórios das séries com os integrais (há quem argumente, por isso, que o crédito deveria ser atribuído a Lagrange e não a Fourier). Mas o facto é que, tendo tudo para ter feito essa descoberta, não o fez e a sua preocupação foi a de desenvolver um argumento matemático que supostamente justificaria a solução de Euler. Pelo que reescreveu a solução na forma análoga à de Euler, e argumentou que isto provava que D'Alembert e Bernoulli estavam errados (quando, efetivamente a sua solução confirmava a conjetura de Bernoulli, permitindo até calcular os respetivos coeficientes de Fourier). D'Alembert de forma perspicaz respondeu que certos aspetos da argumentação - diferenciabilidade das funções as quais eram dadas por fórmulas explícitas em todo o domínio - justificavam mais a sua solução que a de Euler, mas Lagrange, sem conseguir contra argumentar, nunca o admitiu, apesar de tudo.

À luz do ponto de vista privilegiado que temos no século XXI é fácil ser-se condescendente e achar estas discussões quase ingénuas. Mas não devemos menosprezar a diversidade e profundidade das questões que foram levantadas, em face do grau incipiente do desenvolvimento e formulação rigorosa da matemática da altura. Com efeito, entre os problemas debatidos estão, no fundo, a própria definição de função, continuidade e descontinuidade, a ordem de diferenciabilidade e a possibilidade de representação em série de Taylor, continuação analítica, convergência de séries e passagens ao limite, interpolação, soluções fracas de equações diferenciais e, claro, a representação de funções em séries trigonométricas.

Vale a pena ainda notar que quer Clairaut, em 1757, quer o próprio Euler, em 1777, estudando problemas de astronomia, obtiveram o que se poderiam considerar as primeiras fórmulas para os coeficientes da série trigonométrica correspondentes a uma função dada (ao ponto de Lebesgue, no início do século XX designá-los por coeficientes de Euler-Fourier). Mas, devido à especificidade dos problemas em questão, não conseguiram relacionar esses resultados com o problema da vibração da corda, e muito menos com o problema genérico de representações de funções arbitrárias por séries trigonométricas. Essa tarefa coube a Fourier, mas ter-se-ia ainda de aguardar cerca de meio século por essa revolução matemática.

3. Fourier

Jean-Baptiste Joseph Fourier nasceu em Auxerre em 1768, no seio de uma família pobre. Cedo mostrou interesse por matemática, mas por não ser de famílias nobres não pôde ingressar na carreia científica do exército tendo por isso sido forçado a optar por um percurso religioso. No entanto, com o início da revolução francesa em 1789, na qual participou de forma ativa, abandonou a igreja e acabou por ser aceite na recém criada École Normale em Paris, em 1794, onde se destacou, tendo por professores alguns dos mais distintos cientistas de França da época, como Lagrange, Laplace ou Monge. Posteriormente, de 1796 a 1798, tornou-se professor da École Polytechnique, que também havia sido acabada de fundar.

Em 1798, Napoleão Bonaparte, nessa altura um famoso general do exército após a campanha de Itália, convoca Monge e Fourier para o acompanharem na expedição ao Egito. No Cairo, Fourier participa na fundação do Instituto Científico Egípcio e desenvolve estudos que o tornaram num dos mais eminentes egiptólogos da época, tendo sido um dos autores do grandioso *Description de l'Egypte*, de 1809 (curiosamente, a sepultura de Fourier, no famoso cemitério Père Lachaise, em Paris, está decorada de motivos egípcios precisamente devido a este facto).

Regressa a França em 1801, com o objetivo de retomar a sua posição na École Polytechnique. Mas Napoleão, já primeiro cônsul da república e reconhecendo as excelentes qualidades administrativas de Fourier, coloca-o como prefeito na região de Grenoble. O que poderia ter sido o fim da sua carreira científica, ocupado em tarefas político-administrativas, revelou-se na verdade o período mais profícuo da sua vida. Não só consta que foi um bom governador local, como é durante este período que Fourier, além de escrever milhares de páginas para a *Description de l'Egypte*, se começa a interessar pelo estudo da propagação do calor.

E em 1807 submete o seu primeiro trabalho resultante deste estudo, *Mémoire Sur la Propagation de la Chaleur Dans les Corps Solides* à Academia Francesa de Ciências, parte do Instituto de França. O júri, composto por Lagrange, Laplace, Lacroix e Monge, recusou a sua publicação, tendo Lagrange contestado fortemente o tratamento de séries trigonométricas, dado que Fourier já anunciava que qualquer função arbitrária, definida em $[-L.L]$, poderia ser escrita como a soma duma série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{1}$$

com os coeficientes calculados a partir da função f pelas fórmulas

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \qquad n \geq 0, \tag{2}$$

e

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \qquad n \geq 1. \tag{3}$$

Em 1811 Fourier volta a submeter à Academia de Ciências uma versão mais alargada e aprofundada do seu trabalho, *Mémoire Sur la Propagation da la Chaleur*, como candidato ao *Grand Prix de Mathématiques* de 1812. O júri, composto por Laplace, Lagrange e Legendre, atribui-lhe o primeiro prémio, elogiando o seu tratamento do problema da propagação de calor através da formulação do correspondente modelo matemático dado pela equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

descrevendo-a como a "verdadeira equação da transmissão do calor" e destacando a sua originalidade e importância. Para, logo de seguida, criticar severamente a sua resolução matemática através das séries trigonométricas, por "deixar muito a desejar em termos de generalidade e rigor", não o tendo novamente publicado. Mais uma vez Lagrange, em particular, mostrava-se intransigente em aceitar estes resultados surpreendentes.

Fourier dedicou-se então a preparar uma versão completa e definitiva destes trabalhos. Finalmente, em 1822, publicou o clássico *Theorie Analytique de la Chaleur*. A sua importância na história da física e da matemática é difícil de exagerar. Sozinho, Fourier concentrou-se num problema físico ainda pouco estudado; formulou, para a descrição do fenómeno, um modelo matemático baseado numa nova equação diferencial parcial que se veio a impor ao longo dos séculos com uma das mais fundamentais em diferentes áreas da matemática e da física de fenómenos difusivos; e desenvolveu uma inovadora técnica matemática para a sua resolução, baseada em separação de variáveis e na representação de funções em séries trigonométricas.

Apesar de ter sido, com certeza, influenciado pelos trabalhos dos seus antecessores, Fourier foi muito mais longe. Sem, na realidade, ter apresentado demonstrações que se possam considerar completas e rigorosas, mesmo para a época, calculou ainda assim vários exemplos explícitos para comprovar a veracidade dos seus resultados e formulou uma teoria completa associada à ideia, primeiro avançada por Daniel Bernoulli setenta anos antes, de que uma função totalmente arbitrária podia ser escrita como uma sobreposição infinita de harmónicos: calculando-se primeiro os coeficientes pelas fórmulas (2) e (3) (análise), a função poderia depois ser reconstruida pela série (1) (síntese). Mas ao contrário do problema da vibração da corda, onde estas sobreposições harmónicas surgem de forma natural e intuitiva com uma motivação associada ao som, tal como tinha acontecido com Bernoulli, Fourier fê-las surgir numa situação muito menos natural do ponto de vista físico, para o estudo da difusão de calor e como parte do procedimento matemático de resolução da equação diferencial por si proposta. Não chegou a definir precisamente o que entendia por *função totalmente arbitrária* e muito menos se só algumas destas seriam integráveis, de modo a que os correspondentes coeficientes realmente pudessem ser calculados (assumiu que os integrais eram obtidos por áreas, de modo a contemplar as situações em que as funções não fossem dadas por uma fórmula explícita), mas já deu destaque ao problema de convergência de séries, algo que até então era aceite quase sem hesitações. Acima de tudo, demoliu o pressuposto que era assumido até então de que haveria uma relação orgânica intrínseca entre diferentes partes duma *função contínua* no sentido de Euler: a universalidade da representação em séries trigonométricas permitia afinal representar funções quaisquer numa só fórmula explícita global, mesmo as geométricas, ou descontínuas, dadas seccionalmente por diferentes expressões e até por curvas desenhadas à mão. Todas as funções seriam, nesse sentido, contínuas pelo que tal classificação era absurda. Fourier foi assim o primeiro a admitir que uma função geral não se distinguia por ser escrita por uma só fórmula global, ou por diferentes fórmulas em diferentes subintervalos do domínio e que o conhecimento duma fórmula num subintervalo não implicaria que a função seria globalmente dada pela mesmo fórmula em todo o domínio.

Não só as ideias apresentadas no seu trabalho foram totalmente revolucionárias por si mesmas, a mais importante consequência da audácia com que afirmou os seus resultados, totalmente surpreendentes à época (como se vê pela reação adversa, por exemplo, de Lagrange), foi a onda de progresso que desencadeou e que levou à formulação moderna de muitos dos conceitos da análise matemática que conhecemos hoje.

4. Século XIX após Fourier

Poisson e um jovem Cauchy, acabado de desistir do seu início de carreira como engenheiro para se dedicar inteiramente à matemática, foram os primeiros a publicar trabalhos sobre a propagação de calor após Fourier. As ideias de Poisson, de 1823, de como somar a série de Fourier com o que hoje chamamos de médias de Abel e núcleo de Poisson, só se vieram a revelar importantes um século mais tarde. Já Cauchy, no que se refere ao seu trabalho sobre propagação de calor e expansões de funções em séries trigonométricas - onde, competindo pelo reconhecimento, nem sequer citava Fourier - continha inúmeros erros, apesar da atenção que começava a despertar como matemático brilhante depois da publicação do seu *Cours d'Analyse*, de 1821, no qual dava os primeiros passos nas definições modernas e rigorosas de convergência de sucessões e séries, limite e continuidade duma função num ponto (acabando de vez com o conceito de continuidade como aquele que era usado por Euler), assim como de derivada e integral, progressos estes fruto precisamente da necessidade de mais precisão nos seus estudos sobre séries de Fourier.

Foi Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet o primeiro a dar continuação de forma significativa ao trabalho de Fourier. Nasceu em 1805 e em 1822 vai estudar para Paris, onde conhece pessoalmente Fourier e fica impressionado com o seu trabalho sobre a propagação de calor. Em 1829, em Berlim, Dirichlet publica *Sur la Convergence de Séries Trigonométriques Qui Servent à Représenter Une Fonction Arbitraire Entre des Limites Donnés* (e uma versão alargada, em alemão, em 1837), com o propósito de provar rigorosamente a convergência das séries de Fourier, em face da ausência até essa data duma demonstração adequada, assim como de explicar os erros nas tentativas anteriores de Cauchy. Munido das novas definições de convergência, limites e de integral por este criadas, Dirichlet efetivamente demonstra cuidadosamente que, para funções com um número finito de descontinuidades assim com um número finito de máximos e mínimos (a versão que hoje em dia é normalmente ensinada nas disciplinas universitárias introdutórias como o teorema de Dirichlet de convergência pontual das séries de Fourier é para funções seccionalmente diferenciáveis, ou seja, em que a função e a sua primeira derivada têm apenas um número finito de descontinuidades, com limites laterais finitos em todos os pontos) as somas parciais da série de Fourier convergem em cada ponto para a média dos limites laterais $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$, considerando o prolongamento periódico de período $2L$ da função f, para os extremos $x = \pm L$. Em particular, para funções diferenciáveis em todo o intervalo $[-L, L]$ (e tais que $f(-L) = f(L)$) este resultado de Dirichlet estabelece efetivamente a convergência da série de Fourier para o valor da função em cada ponto, em condições muito mais gerais do que as que são precisas, por exemplo, para a convergência da série de Taylor, e assim solidificando a extraordinária importância do trabalho de Fourier.

No entanto, Dirichlet esforça-se por alargar o seu teorema de convergência das séries de Fourier a uma classe o mais geral possível de funções, de forma a ir ao encontro das funções arbitrárias enunciadas por Fourier, mas apercebe-se que a obstrução se encontra na sua integrabilidade para o cálculo dos coeficientes (usando a definição de integral recentemente proposta por Cauchy). E, para demonstrar como certas funções não seriam integráveis, sugere o exemplo duma função com um valor a nos pontos racionais do domínio, e $b \neq a$ nos irracionais. Esta é a famosa função de Dirichlet, absolutamente inédita e surpreendente para a época, uma vez que não era dada nem por uma fórmula explícita, nem por uma curva geométrica. Aliás, era descontínua em todos os pontos do seu domínio, de acordo com a nova definição de continuidade num ponto dada por Cauchy. No fundo, o que estava em causa para a ideia duma função tão geral como esta era simplesmente a de correspondência arbitrária, mas bem determinada, entre os pontos do domínio e as suas imagens. Pelo que Dirichlet propõe o que se considera ser a primeira definição de função no sentido moderno do conceito

> y é uma função da variável x, definida num intervalo $a < x < b$, se para cada valor da variável x neste intervalo corresponde um único valor determinado da variável y. Além disso, é irrelevante de que forma esta correspondência é efetuada.

Dirichlet não publicou mais trabalhos em séries de Fourier, mas enquanto dava aulas na universidade de Berlim haveria de influenciar um extraordinário aluno: Riemann.

Georg Friedrich Bernhard Riemann nasceu em 1826, inicia os estudos para o seu doutoramento na universidade de Göttingen em 1846 e, por sugestão de Gauss, seu orientador, passa dois anos entre 1847 e 1849 na universidade de Berlim, onde entra em contacto com Dirichlet. Mais tarde, em 1854, submete duas teses para as suas provas de habilitação, necessárias para tornar-se professor em Göttingen (ambas só viriam a ser publicadas por Dedekind em 1867, já após a sua morte): na primeira, *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, desenvolve os princípios do que se passou a chamar de geometria riemanniana; na segunda, *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, desenvolveu um estudo profundo e inovador sobre séries trigonométricas.

Neste notável trabalho da sua *Habilitationsschrift* Riemann começa por fazer uma descrição exaustiva da história das séries trigonométricas até então, no que é ainda hoje uma das referências fundamentais sobre os episódios da controvérsia em torno da vibração de cordas e equação das ondas, entre D'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli e Lagrange, no século XVIII, assim como dos detalhes acerca do fraco reconhecimento que os trabalhos de Fourier inicialmente tiveram, especialmente devido a Lagrange - por quem Riemann claramente demonstra uma opinião muito negativa, em comparação com Fourier, que considera ter sido visionário e com um total entendimento das questões essenciais acerca da expansão de funções em séries de funções harmónicas. Depois, para o estudo das séries trigonométricas, Riemann apercebe-se da centralidade e importância da questão de integração de funções, para a qual a definição criada por Cauchy e usada por Dirichlet era francamente insuficiente. E assim, para dispor de uma teoria de integração mais eficaz, desenvolve toda uma nova definição de integral na segunda parte da sua tese, que é essencialmente aquela que é hoje ensinada genericamente na matemática universitária: o integral de Riemann. Por fim, na última parte da tese, concentra-se nas séries de Fourier e séries trigonométricas gerais. Relativamente às séries de Fourier, entre os resultados mais significativos que provou e que se vieram a tornar clássicos na teoria de análise harmónica, demonstra que os coeficientes (2) e (3) de funções integráveis tendem para zero quando n tende para infinito, no que veio a chamar-se de lema de Riemann-Lebesgue (Lebesgue generalizou mais tarde o mesmo resultado às funções integráveis da sua teoria de integração). Riemann também demonstrou que a convergência das séries de Fourier num ponto depende apenas dos valores da função f na vizinhança desse ponto, apesar dos coeficientes (2) e (3) dependerem da integração da função sobre todo o seu domínio, um resultado que é atualmente conhecido como o princípio de localização de Riemann.

Mas onde Riemann realmente inovou profundamente foi na teoria geral de séries trigonométricas. Em vez de centrar o problema numa função geral, como fez Fourier, e questionar-se a seguir se é possível reconstruí-la como a soma duma série com os coeficientes adequados, Riemann inverteu completamente o ponto de vista do problema centrando-se em séries trigonométricas gerais e questionando-se para que tipo de funções elas poderiam convergir. Por outras palavras, em vez de buscar condições suficientes para que uma função pudesse ser representada pela sua série de Fourier, como Dirichlet tinha feito, Riemann procurou caracterizar as funções dadas por expansões em séries trigonométricas arbitrárias, com coeficientes não necessariamente os propostos por Fourier. Ao conjunto de problemas e resultados desenvolvidos nesta perspetiva chama-se hoje teoria de Riemann de séries trigonométricas. Em particular, uma das questões essenciais levantadas foi precisamente o problema da unicidade dos coeficientes, ou seja, se duas séries trigonométricas com coeficientes diferentes poderiam convergir para a mesma função. E, sendo únicos, se seriam necessariamente os coeficientes de Fourier ou se poderia uma série trigonométrica convergir até para uma função não integrável para a qual, portanto, não faria sequer sentido falar de coeficientes dados pelas fórmulas (2) e (3). Riemann não provou nenhum destes resultados, mas desenvolveu técnicas fundamentais que se vieram a mostrar centrais no desenvolvimento de respostas a essas questões após a sua morte, aos 39 anos, em 1866. Terminou a sua tese com um capítulo onde apresentava variados exemplos de funções e séries com diferentes propriedades finas de continuidade e integrabilidade, como a bem hoje conhecida função integrável à Riemann que é contínua nos irracionais e descontínua apenas nos racionais, ou a primeira proposta duma função dada por uma série trigonométrica que seria contínua mas não diferenciável em ponto algum.

Seria Georg Cantor, nascido em 1845 em São Petersburgo, quem, numa série de artigos escritos logo no início da sua carreira científica, entre 1870 e 1872, viria a resolver uma parte significativa do problema da unicidade de representação de funções por séries trigonométricas e, em consequência desse mesmo estudo, criar a uma das mais importantes áreas da matemática: a teoria dos conjuntos. Com efeito, em 1870, seguindo a sugestão de Heine para estudar as conjeturas levantadas por Riemann na sua tese de habilitação, Cantor demonstra que se uma série trigonométrica arbitrária converge para zero em *todos* os pontos, então os coeficientes são necessariamente nulos, o que implica, pela diferença, que se duas séries convergem para a mesma função em todos os pontos então os seus coeficientes serão iguais. Em dois outros artigos posteriores Cantor tenta alargar este resultado removendo conjuntos excecionais de pontos, os chamados conjuntos de unicidade, tais que se uma série trigonométrica converge para zero em todos os pontos do seu complementar, isso ainda implica ainda que os coeficientes da série são nulos. Em 1871, no primeiro desses artigos, Cantor prova que conjuntos de pontos finitos são de unicidade. E em 1872, no seminal *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, estende o resultado a conjuntos contáveis fechados, desenvolvendo no processo de argumentação as ideias de números ordinais, indução transfinita e os primeiros conceitos modernos de teoria de conjuntos.

Até ao final do século XIX, Paul du Bois-Reymond prova em 1875 que se uma série trigonométrica converge em todos os pontos para uma função integrável, então os seus coeficientes - únicos, pelo teorema de unicidade de Cantor - são necessariamente os dados por Fourier. Mas mantém-se em aberto a questão duma série poder convergir para uma função não integrável. O final do século XIX fica marcado, no entanto, pela proliferação de exemplos patológicos. Primeiro, o próprio du Bois-Reymond constrói, em 1873, um exemplo duma função contínua com a correspondente série de Fourier divergente num ponto, e pouco tempo depois apresenta um novo exemplo em que a divergência ocorre num conjunto denso de pontos. De repente, a universalidade da representação de funções arbitrárias por séries trigonométricas, anunciada no início do século por Fourier, parece cair por terra, com tal não sendo afinal possível sequer para funções contínuas. Por outro lado, as funções contínuas revelam-se elas próprias também bastante patológicas, quando em 1872 Karl Weirstrass, inspirado no exemplo primeiro proposto por Riemann, apresenta uma função contínua dada por uma série trigonométrica sem derivada em qualquer ponto, e assim destrói a perceção que se tinha na altura de que funções contínuas seriam em geral diferenciáveis, a menos de alguns pontos isolados (supostamente Bolzano, em 1834, já teria dado um exemplo semelhante, que passou despercebido). Estes exemplos, motivados pelo estudo, e construídos a partir, da teoria de séries de Fourier vieram reforçar a importância do rigor e da meticulosa fundamentação lógica da análise matemática.

Dá-se então uma separação dramática entre a maneira como os matemáticos do final do século XIX olham para funções de variável real e para funções de variável complexa. O próprio Weierstrass, na sequência dos trabalhos pioneiros de Cauchy e Riemann em análise complexa, empenha-se em desenvolver uma teoria de funções analíticas, ou holomorfas, as quais de alguma forma representavam precisamente a conceção intuitiva de função ideal desde os tempos de Euler, no século anterior: infinitamente diferenciáveis e tais que o seu conhecimento num subconjunto do seu domínio implicaria a sua determinação global de forma única. Nos últimos anos do século XIX a "verdadeira" teoria de funções assumia-se como sendo de variável complexa, enquanto as funções reais eram relegadas para segundo plano como um mundo estranho e patológico. São famosas as declarações de Hermite dizendo a Stieltjes que fugia com medo e horror desse mal lamentável que eram as funções sem derivadas, ou Poincaré descrevendo essas funções como monstros produzidos pela lógica, sem qualquer utilidade prática, e apenas para mostrar que os antepassados estavam errados quando pensavam em funções honestas.

5. Século XX

A análise matemática no século XX é fortemente influenciada pela introdução, logo no começo do século, duma definição ainda mais geral e poderosa de integral por Henri Lebesgue, em 1902, mais um vez em forte associação com os seus estudos de séries de Fourier. Generalizando a definição de coeficientes de Fourier, agora às funções integráveis no seu novo sentido, Lebesgue estende a elas o resultado de Riemann, de que os coeficientes de Fourier tendem para zero quando a frequência tende para infinito. Daí o nome de lema de Riemann-Lebesgue. Depois, focando-se no ponto de vista de Riemann de séries trigonométricas gerais, apresenta finalmente um exemplo duma série convergente em todos os pontos para uma função não integrável: há funções, portanto, que são dadas pela soma duma série trigonométrica única, mas que não é uma série de Fourier visto que os coeficientes de Fourier nem sequer podem ser calculados. Por fim Lebesgue prova também que se um conjunto tem medida positiva então não é de unicidade (diz-se que é então um conjunto de multiplicidade), ou seja, há séries trigonométricas não nulas que convergem para zero em todos os pontos do seu complementar.

Na sequência destes trabalhos de Lebesgue sobre séries trigonométricas e de Fourier, cria-se a ideia de que os conjuntos de medida nula caracterizariam todos os conjuntos de unicidade, primeiro investigados por Cantor. Mas em 1916 Dmitrii Menshov desprova essa suposição construindo um exemplo duma série trigonométrica não nula que converge para zero em quase toda a parte, ou seja, no complementar dum conjunto de medida de Lebesgue nula. É possível, portanto, ter duas séries trigonométricas com coeficientes diferentes - uma delas, pelo menos, não sendo então uma série de Fourier - que representam a mesma função em quase toda a parte.

Com tantos exemplos estranhos e contrários à intuição, levanta-se também a questão duma série de Fourier poder convergir, mas não necessariamente para a função que lhe deu origem. Algo como a série de Taylor duma função infinitamente diferenciável não analítica. Leopold Fejér acaba por eliminar essa dúvida ao abordar a soma da série de Fourier duma maneira ligeiramente diferente da habitual e com isso introduzindo um método inovador em análise de Fourier. Em vez do limite das somas parciais ele considera um método de soma de séries mais abrangente, introduzido poucos anos antes por Ernesto Cesàro, em que se considera o limite da sucessão das médias aritméticas dessas somas parciais, as chamadas médias de Cesàro: afinal, se as somas parciais convergirem, as suas médias aritméticas convergirão também para o mesmo valor. E, claro, as médias aritméticas podem mais genericamente convergir, inclusivamente em situações em que as somas parciais não o fazem. Já Abel tinha considerado algo análogo como forma mais geral de somar séries, a par da primeira ideia proposta por Poisson para as séries de Fourier, a qual agora, quase um século depois, começava a chamar a atenção e ganhar relevo. Hoje estas formas mais gerais de definir a soma duma série são conhecidas como métodos de soma. Fejér prova assim, nos primeiros anos do século XX, que, para qualquer função integrável e para as quais existam os limites laterais num ponto, a sucessão das médias aritméticas das somas parciais convergem para $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$. Em particular, para funções contínuas, as médias de Cesàro convergem uniformemente para f. Ou seja, as somas parciais tradicionais poderão, na pior das hipóteses, ser divergentes, mas convergindo para algum limite num ponto, esse limite terá necessariamente que ser igual ao limite das suas médias aritméticas, e portanto, no caso de funções contínuas, igual a $f(x)$. Adaptando este método mais geral de somar séries ao novo integral de Lebesgue foi ainda possível mostrar que as médias de Cesàro da série de Fourier duma função integrável à Lebesgue convergem sempre em norma de volta para a função, e pontualmente fazem-no quase em toda a parte. Fejér proporcionou assim uma forma de se poder sempre recuperar uma função integrável a partir dos seus coeficientes de Fourier, somando a série desta forma alternativa, mesmo que as somas parciais habituais não sejam a melhor forma de o fazer. Foi também possível concluir, a partir deste resultado, a unicidade dos coeficientes de Fourier para funções integráveis, ou seja, não poderão existir duas funções integráveis diferentes (a menos de diferenças em conjuntos de medida de Lebesgue nula) com os mesmos coeficientes de Fourier.

No entanto, apesar deste método de Fejér permitir reconstruir uma função contínua, até uniformemente, a partir dos seus coeficientes de Fourier tomando o limite das médias de Cesàro, ainda assim era concebível, em face dos exemplos de du Bois-Reymond do século anterior, poder existir uma função contínua com uma série de Fourier cujas somas parciais fossem divergentes em todos os pontos. Nikolai Luzin acreditava que não e propõe em 1913 uma conjetura de que todas as funções de quadrado integrável à Lebesgue, denotadas por conjunto L^2 e que incluem as funções contínuas, teriam séries de Fourier convergentes em quase toda a parte. Ou seja, que aparte eventualmente dum conjunto de medida de Lebesgue nula onde as coisas pudessem correr mal, a série de Fourier convergiria para a função. Afinal os exemplos de du Bois-Reymond, e outros que surgiram entretanto para funções contínuas, correspondiam sempre a séries de Fourier divergentes em conjuntos densos de pontos, mas com medida nula. Durante os muitos anos que permaneceu sem ser demonstrada, foi conhecida como a famosa conjetura de Luzin. Em 1922 Andrey Kolmogorov, aluno de Luzin então apenas com 19 anos, apresenta um exemplo duma função integrável à Lebesgue para a qual a correspondente série de Fourier, ou seja, com os coeficientes dados por (2) e (3) diverge em todos os pontos. Este exemplo importantíssimo na história da análise de Fourier, não desprovando a conjetura de Luzin já que L^2 é um subconjunto das funções integráveis à Lebesgue, é ainda assim o mais forte exemplo contra a afirmação geral de Fourier e cria um forte sentimento negativo relativamente à convergência em geral das séries de Fourier em cada ponto do domínio, especialmente para funções com pouca regularidade, que haveria de perdurar por várias décadas. Existem portanto, no mundo das funções arbitrárias integráveis, para as quais é possível calcular coeficientes de Fourier, algumas para as quais a correspondente série nem sequer converge, qualquer que seja o ponto do domínio.

Nos anos 20 e 30 do século XX, o desenvolvimento da análise funcional, e em particular a teoria dos espaços de Hilbert, concretamente L^2, permitiu olhar para a expansão de funções em séries de Fourier numa nova perspetiva, agora como a generalização a dimensões infinitas da representação euclidiana dum vetor numa base ortogonal. A influência recíproca das séries de Fourier na análise funcional revela-se no facto de, para um espaço de Hilbert genérico, se chamar série de Fourier à representação dum vetor desse espaço numa base de Hilbert qualquer, o chamado teorema de Riesz-Fischer, assim como se denotam por coeficientes de Fourier os produtos internos do vetor com os elementos dessa base, mesmo que nada tenham que ver com as originais funções trigonométricas em intervalos reais.

Com a introdução dos espaços L^p de funções integráveis à Lebesgue e dos recém desenvolvidos métodos de análise funcional a eles aplicados, surgiram novas e importantes questões acerca das séries de Fourier nesta perspetiva. Para além da convergência das séries ponto a ponto, como na conjetura de Luzin, punha-se também a questão da convergência das somas parciais das séries de Fourier nas novas normas destes espaços L^p. Em 1924, Marcel Riesz, aluno de Fejér, baseado em trabalhos anteriores de Kolmogorov sobre funções harmónicas conjugadas na bola unitária do plano complexo, prova que o operador de conjugação é limitado em L^p e que isso implica a convergência, na norma L^p das séries de Fourier, para $1 < p < \infty$. Em $p = 1$ já se conheciam exemplos, como os de Kolmogorov, para os quais a série não converge nem sequer na norma integral, enquanto que para L^∞ a convergência em norma corresponde à convergência uniforme, o que implicaria que o limite da série teria de ser contínuo, levando a uma contradição no caso de séries de Fourier de funções limitadas descontínuas. Nessa demonstração, Riesz desenvolve um método de interpolação de operadores, mais tarde melhorado pelo seu aluno Olof Thorin, no que hoje é conhecido como teorema de interpolação de Riesz-Thorin. Conjuntamente com um teorema análogo desenvolvido paralelamente por Józef Marcinkiewicz, deram início a uma importante área da análise matemática moderna, a teoria de interpolação de operadores.

Antoni Zygmund, orientador de Marcinkiewicz na Polónia e figura de destaque da análise de Fourier a partir dos anos 40 do século XX, refugia-se em 1940 nos Estados Unidos, na Universidade de Chicago, devido ao início da segunda guerra mundial. Nessa altura, o teorema de Riesz da convergência das séries de Fourier na norma dos espaços L^p já se sabia estar intimamente ligado, não só ao problema da conjugação de funções harmónicas na bola unitária, mas também à transformada de Hilbert. Zygmund decide generalizar esse tipo de resultados a operadores singulares mais gerais, análogos à transformada de Hilbert, removendo os métodos de análise complexa usados por Riesz e Kolmogorov, de modo a serem generalizáveis a mais dimensões. E juntamente com os seus alunos Alberto Calderón e Elias Stein, dá início a um programa de investigação que marca fortemente a direção da análise matemática da segunda metade do século XX, denominada de métodos de análise real em análise harmónica. Fazem parte desta nova área conceitos como operadores maximais (primeiro inventados por Hardy e Littlewood em 1930) e operadores integrais singulares. Mais tarde, Elias Stein e o seu aluno Charles Fefferman, na Universidade de Princeton, alargam esta área à teoria dos espaços de Hardy e BMO (bounded mean oscillation). Zygmund viria a escrever o que é considerado o tratado mais completo e a referência incontornável sobre séries trigonométricas e de Fourier [6].

Não se pode deixar de salientar também que uma das grandes inovações da análise matemática do século XX, que foi a criação no final dos anos 40 da teoria das distribuições por Laurent Schwartz, na sequência de ideias iniciais de Sobolev e até do próprio Riemann na sua tese de habilitação sobre séries trigonométricas, também esteve intimamente ligada à análise de Fourier, mais concretamente o caso das distribuições temperadas para a transformada de Fourier, que permitiu unificar numa só classe de objetos a análise harmónica em $\mathbb{R}^n$.

Nos anos 60 do século XX, já americanos e soviéticos enviavam seres humanos em órbitas à volta da terra e os Beatles eram super estrelas mundiais, mas continuava sem se saber se existiriam funções contínuas com séries de Fourier divergentes em todos os pontos. Em 1966, Jean-Pierre Kahane e Ytzhak Katznelson provam que, dado qualquer conjunto de medida nula de Lebesgue, é sempre possível construir uma função contínua cuja série de Fourier diverge em todos os pontos desse conjunto. E estabelecem, no mesmo artigo, uma dicotomia: ou existe uma função contínua com série de Fourier divergente em todos os pontos, ou então para todas as funções contínuas as suas séries de Fourier convergem em quase toda a parte. É finalmente Lennart Carleson quem, pouco depois, no mesmo ano de 1966, prova a conjetura de Luzin. Concluindo, portanto, que as séries de Fourier de funções contínuas em intervalos de $\mathbb{R}$ convergem em quase toda a parte para a função original, ou seja, quando muito falhando num conjunto de medida de Lebesgue nula. Curiosamente, por sugestão de Zygmund, Carleson havia começado e passado vários anos a tentar construir precisamente um exemplo de função contínua com série de Fourier divergente em todos os pontos. Até que, nessa procura intensa dum contra-exemplo para a conjetura de Luzin, se ter apercebido que efetivamente conseguia provar o oposto.

Vale a pena sublinhar, no entanto, que mesmo um resultado tão difícil e extraordinário como o de Carleson só é válido para funções unidimensionais. A teoria das séries de Fourier para funções em $\mathbb{R}^n$, por outro lado, permanece em muitos aspetos um terreno ainda com muito por explorar. Charles Fefferman provou, em 1971, o famoso teorema do multiplicador da bola, que permite concluir que a várias dimensões, e em termos de convergência nas normas dos espaços L^p, as séries de Fourier convergem apenas na norma do espaço de Hilbert L^2, ao contrário do teorema de Riesz para séries de Fourier a uma dimensão que convergem para todos os $1 < p < \infty$. E relativamente à convergência pontual em quase toda a parte não existe nenhum análogo do teorema de Carleson a várias dimensões, cujas questões continuam ainda largamente em aberto.

6. Conclusão

Não há dúvida que se pode considerar, como muitos matemáticos afirmam, que as séries de Fourier são o eixo de rotação da análise matemática, em face da longa história e notável influência da audaciosa afirmação de Fourier, de que uma função arbitrária poderia ser dada como a soma de uma série de funções trigonométricas com coeficientes apropriados. Essa influência continua a fazer-se sentir até aos dias de hoje, não só na solidez dos conceitos que são ensinados como clássicos e fundamentais nas disciplinas de cálculo e análise matemática dos primeiros anos universitários, como em quase todos os variadíssimos recantos da vasta análise matemática moderna, assim como no permanente surgimento de novas áreas ativas de investigação actual, das quais são exemplo a análise microlocal de operadores pseudo-diferenciais e integrais de Fourier, os métodos de análise harmónica em equações diferenciais parciais, ou a recentemente criada teoria de wavelets e análise multi-escala, com importantíssimas aplicações em processamento de sinais. O trabalho significativo para o progresso da matemática a partir da segunda metade do século XX, desenvolvido por investigadores ligados à análise de Fourier, tem sido também objecto de reconhecimento global através da atribuição de várias medalhas Fields a matemáticos proeminentes como Laurent Schwartz, Lars Hörmander, Charles Fefferman, Jean Bourgain ou Terence Tao.

References

[1] H. S. Carslaw, *An Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals, Third Revised Edition*, Dover Publications, New York, 1950 (republicação da terceira edição, publicada por Macmillan and Company, 1930).
[2] J.-P. Kahane, P.-G. Lemarié-Rieusset, *Fourier Series and Wavelets*, Gordon and Breach Publishers, Amsterdam, 1995.
[3] I. Kleiner, *Evolution of the Function Concept: A Brief Survey*, The College Mathematics Journal, vol.20, no. 4, 1989, pp. 282–300.
[4] N. Luzin, *The evolution of... "Function: Part I."*, editado e traduzido por Abe Shenitzer, The American Mathematical Monthly, vol. 105, no. 1, 1998, pp. 59-–67.
[5] N. Luzin, *The evolution of... "Function: Part II."*, editado e traduzido por Abe Shenitzer, The American Mathematical Monthly, vol. 105, no. 3, 1998, pp. 263-–270.
[6] A. Zygmund, *Trigonometric Series, 3rd Edition*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

Centro de Análise Matemática, Geometria e Sistemas Dinâmicos,
Departamento de Matemática,
Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa
Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa, Portugal.
Email address: jsilva@math.tecnico.ulisboa.pt