# Variedades diferenciáveis e formas diferenciais

## 1 Variedades diferenciáveis

**Definição 1.1** *Um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ diz-se uma* **variedade diferenciável de dimensão** $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ *se para qualquer ponto $\mathbf{a} \in M$ existe um conjunto aberto $U \ni \mathbf{a}$ e uma função $\mathbf{f} : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$ de classe $C^\infty$ tais que*

$$M \cap U = \mathrm{Graf}(\mathbf{f}) \cap U$$

*para alguma ordenação das coordenadas Cartesianas de $\mathbb{R}^n$.*

**Nota 1.2** *Definimos ainda uma variedade de dimensão $0$ como um conjunto do pontos isolados, e uma variedade de dimensão $n$ como um conjunto aberto.*

**Teorema 1.3** *$M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável de dimensão $m$* **sse** *para qualquer ponto $\mathbf{a} \in M$ existe um conjunto aberto $U \ni \mathbf{a}$ e uma função $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ de classe $C^\infty$ tais que*

*(i)* $M \cap U = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$;

*(ii)* $\operatorname{car} D\mathbf{F}(\mathbf{a}) = n - m$.

**Dem:** Suponhamos sem perda de generalidade que $\det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{a}) \neq 0$, onde escrevemos $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{z})$ com $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n-m}$. Então pelo Teorema da Função Implícita existe um conjunto aberto $V \subset U$ com $\mathbf{a} \in V$ tal que $M \cap V$ é dado pelo gráfico de uma função $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ de classe $C^\infty$. Isto mostra que um conjunto satisfazendo as condições no enunciado é de facto uma variedade diferenciável. Para mostrar que uma variedade diferenciável satisfaz as condições no enunciado basta tomar $\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{z}$. $\square$

**Definição 1.4** *Um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ diz-se* **tangente** *a um conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ no ponto $\mathbf{a} \in M$ se existe uma curva $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to M$ de classe $C^\infty$ tal que $\mathbf{g}(0) = \mathbf{a}$ e $\mathbf{g}'(0) = \mathbf{v}$. Um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ diz-se* **ortogonal** *a $M$ no ponto $\mathbf{a}$ se é ortogonal a todos os vetores tangentes a $M$ em $\mathbf{a}$.*

**Proposição 1.5** *Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade de dimensão $m$, o conjunto $T_\mathbf{a}M$ de todos os vetores tangentes a $M$ no ponto $\mathbf{a} \in M$ é um espaço vetorial de dimensão $m$, dito o* **espaço tangente** *a $M$ no ponto $\mathbf{a}$.*

**Dem:** Suponhamos sem perda de generalidade que $M$ é dada por $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ numa vizinhança do ponto $\mathbf{a}$, onde usamos a notação na demonstração do teorema acima. Qualquer curva $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to M$ com $\mathbf{g}(0) = \mathbf{a}$ é dada nesta vizinhança por $\mathbf{g}(t) = (\mathbf{h}(t), \mathbf{f}(\mathbf{h}(t)))$, onde $\mathbf{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ é uma curva em $\mathbb{R}^m$. Desta forma, $\mathbf{g}'(0) = (\mathbf{h}'(0), D\mathbf{f}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}'(0))$, e portanto qualquer vetor tangente a $M$ no ponto $\mathbf{a}$ está contido na imagem de $\mathbb{R}^m$ pela aplicação linear injetiva $\mathbf{u} \mapsto (\mathbf{u}, D\mathbf{f}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u})$. Por outro lado, dado $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, temos que a sua imagem por esta aplicação é o vetor tangente à curva $\mathbf{g}(t) = (\mathbf{b} + \mathbf{u}t, \mathbf{f}(\mathbf{b} + \mathbf{u}t))$, onde escrevemos $\mathbf{a} = (\mathbf{b}, \mathbf{c})$, e portanto tangente a $M$ no ponto $\mathbf{a}$. Concluímos que $T_\mathbf{a}M$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $m$. $\square$

**Definição 1.6** *O* **espaço normal** *a uma variedade $M \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão $m$ no ponto $\mathbf{a}$ é o espaço vetorial $T_{\mathbf{a}}^{\perp}M$ de dimensão $n-m$ obtido tomando o complemento ortogonal de $T_{\mathbf{a}}M$.*

**Proposição 1.7** *Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão $m$, $\mathbf{a} \in M$ um ponto de $M$, $U \ni \mathbf{a}$ um conjunto aberto e $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ tais que $M \cap U = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ com $\operatorname{car} D\mathbf{F}(\mathbf{a}) = n-m$. Então $T_{\mathbf{a}}M = \ker D\mathbf{F}(\mathbf{a})$.*

**Dem:** Uma vez que $\dim\ker D\mathbf{F}(\mathbf{a}) = m$, basta ver que $T_{\mathbf{a}}M \subset \ker D\mathbf{F}(\mathbf{a})$. Para qualquer curva $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to M$ de classe $C^\infty$ satisfazendo $\mathbf{g}(0) = \mathbf{a}$, temos $\mathbf{F}(\mathbf{g}(t)) = \mathbf{0}$ sempre que $\mathbf{g}(t) \in U$, e portanto $D\mathbf{F}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{g}'(0) = \mathbf{0}$. □

**Definição 1.8** *Uma* **parametrização** *de uma variedade $M \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão $m$ é uma aplicação $\mathbf{g} : U \to M$ (com $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto) injectiva, de classe $C^\infty$ e tal que $\operatorname{car} D\mathbf{g}(\mathbf{t}) = m$ para todo o $\mathbf{t} \in U$.*

**Proposição 1.9** *Se $\mathbf{g} : U \to M$ é uma parametrização da variedade $M \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão $m$ então*

$$T_{\mathbf{g}(\mathbf{t})}M = \operatorname{span}\left\{\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1}(\mathbf{t}), \ldots, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^m}(\mathbf{t})\right\}.$$

**Dem:** Óbvia. □

**Proposição 1.10** *Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade-$m$ e $\mathbf{a} \in M$ então existe um conjunto aberto $V \ni \mathbf{a}$ tal que $M \cap V$ é a imagem de uma parametrização $\mathbf{g} : U \subset \mathbb{R}^m \to M$.*

**Dem:** Usando a notação na demonstração do teorema acima, basta tomar $\mathbf{g}(\mathbf{t}) = (\mathbf{t}, \mathbf{f}(\mathbf{t}))$. □

## 2 Covetores e produto exterior

**Definição 2.1** *O* **espaço vetorial dual** *de* $\mathbb{R}^n$ *é*

$$(\mathbb{R}^n)^* = \{\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \alpha \text{ é linear}\}.$$

*Os elementos de* $(\mathbb{R}^n)^*$ *designam-se por* **covetores**.

Por linearidade, um covetor é determinado pela sua acção na base canónica de $\mathbb{R}^n$. Definimos os covetores $dx^1, \ldots, dx^n \in (\mathbb{R}^n)^*$ através de

$$dx^i(\mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

(veremos mais tarde a razão de ser desta notação). Dado $\alpha \in (\mathbb{R}^n)^*$, temos

$$\alpha(\mathbf{v}) = \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} v^i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} v^i \alpha(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} v^i \alpha_i,$$

onde $\alpha_i = \alpha(\mathbf{e}_i)$. Em particular, $dx^i(\mathbf{v}) = v^i$, e portanto

$$\alpha(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, dx^i(\mathbf{v}) \Leftrightarrow \alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, dx^i.$$

Daqui facilmente se conclui que $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$ é uma base para $(\mathbb{R}^n)^*$, que é então um espaço vetorial de dimensão $n$.

**Definição 2.2** *Um* **tensor**-$k$ *(covariante)* $T$ *é uma aplicação multilinear* $T : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$, *i.e.*

*(i)* $T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i, \ldots, \mathbf{v}_k) = T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k) + T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{w}_i, \ldots, \mathbf{v}_k)$;

*(ii)* $T(\mathbf{v}_1, \ldots, \lambda\mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k) = \lambda T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k)$.

**Exemplo 2.3**

*(i) Um covetor é um tensor-1.*

*(ii)* $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dado por* $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ *é um tensor-2 (***tensor da métrica***).*

*(iii)* $T : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ *dado por* $T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *é um tensor-n* **alternante**.

**Definição 2.4** *Um tensor-k* $\alpha$ *diz-se* **alternante**, *ou um* **covetor de grau** $k$, *se*

$$\alpha(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_j \ldots, \mathbf{v}_k) = -\alpha(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_i \ldots, \mathbf{v}_k).$$

*Designamos por* $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ *o espaço vetorial dos covetores-*$k$.

Dados $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$, definimos $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ mediante

$$dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \det \begin{bmatrix} dx^{i_1}(\mathbf{v}_1) & \ldots & dx^{i_1}(\mathbf{v}_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ dx^{i_k}(\mathbf{v}_1) & \ldots & dx^{i_k}(\mathbf{v}_k) \end{bmatrix}.$$

Note-se que

$$dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = -dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

e portanto

$$dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = 0.$$

**Proposição 2.5** $\left\{dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\right\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$ *é uma base para* $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$*, cuja dimensão é portanto* $\binom{n}{k}$.

**Dem:** Se

$$\sum_{i_1 < \ldots < i_k} \alpha_{i_1 \ldots i_k} \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = 0$$

então aplicando este covetor-$k$ a $\mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_k}$ (com $j_1 < \ldots < j_k$) obtém-se $\alpha_{j_1 \ldots j_k} = 0$. Isto mostra que os elementos de $\left\{dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\right\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$ são linearmente independentes. Para mostrar que geram $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, tome-se um covetor-$k$ $T$ e considere-se

$$\alpha \;=\; \sum_{i_1 < \ldots < i_k} T(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_k}) \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Deve ser claro que

$$\alpha(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_k}) = T(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_k})$$

para $i_1 < \ldots < i_k$; por serem ambos alternantes, a igualdade vale para os índices numa ordem qualquer, e por multilinearidade vale para quaisquer vetores. □

**Nota 2.6** *Uma vez que* $\binom{n}{0} = 1$*, define-se* $\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$.

**Exemplo 2.7** $\Lambda^2\left(\mathbb{R}^3\right)$ *tem dimensão* $3$*, e uma base é por exemplo* $\{dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy\}$*. Isto faz com que* $\mathbb{R}^3$ *possa ser identificado tanto com* $\Lambda^1\left(\mathbb{R}^3\right) \equiv \left(\mathbb{R}^3\right)^*$ *como com* $\Lambda^2\left(\mathbb{R}^3\right)$*: se* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$*, definimos*

$$\omega_{\mathbf{v}} = v^1 dx + v^2 dy + v^3 dz$$

*e*

$$\Omega_{\mathbf{v}} = v^1 dy \wedge dz + v^2 dz \wedge dx + v^3 dx \wedge dy.$$

*Note-se que na verdade* $\omega_{\mathbf{v}}$ *pode ser definida para* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$*. É fácil ver que*

$$\omega_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w},$$

*e que*

$$\Omega_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}).$$

**Definição 2.8** *Se* $\alpha \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ *e* $\beta \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$*,*

$$\alpha \;=\; \sum_{i_1<\ldots<i_k} \alpha_{i_1\ldots i_k}\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}, \qquad \beta \;=\; \sum_{j_1<\ldots<j_l} \beta_{j_1\ldots j_l}\, dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l},$$

*definimos o seu* **produto exterior** $\alpha\wedge\beta \in \Lambda^{k+l}(\mathbb{R}^n)$ *como*

$$\alpha\wedge\beta \;=\; \sum_{\substack{i_1<\ldots<i_k\\ j_1<\ldots<j_l}} \alpha_{i_1\ldots i_k}\,\beta_{j_1\ldots j_l}\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_l}.$$

**Nota 2.9** *Se* $\alpha$ *é um covetor-*$0$ *(número real), o produto exterior por* $\alpha$ *é simplesmente o produto por um escalar.*

**Exemplo 2.10** *O produto exterior pode ser visto como uma generalização do produto externo: se* $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$ *então*

$$\omega_{\mathbf{v}}\wedge\omega_{\mathbf{w}} = \Omega_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}.$$

*Pode também ser visto como uma generalização do produto interno:*

$$\omega_{\mathbf{v}}\wedge\Omega_{\mathbf{w}} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\, dx\wedge dy\wedge dz.$$

**Proposição 2.11 Propriedades do produto exterior:**

*(i)* $\alpha\wedge(\beta+\gamma) = \alpha\wedge\beta+\alpha\wedge\gamma$;

*(ii)* $\alpha\wedge\beta = (-1)^{kl}\beta\wedge\alpha$ *se* $\alpha\in\Lambda^k(\mathbb{R}^n), \beta\in\Lambda^l(\mathbb{R}^n)$;

*(iii)* $\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma) = (\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma$.

**Dem:** Exercício. $\square$

## 3 Formas diferenciais, “pull-back” e derivada exterior

**Definição 3.1** *Uma* **forma diferencial de grau** $k$ *em* $\mathbb{R}^n$ *é uma função* $\omega : \mathbb{R}^n \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ *de classe* $C^\infty$. *Designamos por* $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$ *o conjunto das formas-*$k$ *em* $\mathbb{R}^n$.

**Exemplo 3.2** *Uma forma-*$0$ *é simplesmente uma função* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de classe* $C^\infty$.

**Definição 3.3** *Se* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é de classe* $C^\infty$ *e* $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^m)$ *então o* **“pull-back”** *de* $\omega$ *por* $\mathbf{f}$ *é a forma-*$k$ $\mathbf{f}^*\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ *definida por*

$$(\mathbf{f}^*\omega)(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \omega(\mathbf{f}(\mathbf{x}))(D\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v}_1, \ldots, D\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v}_k).$$

**Exemplo 3.4** *O “pull-back” de uma forma-*$0$ $\phi$ *por* $\mathbf{f}$ *é simplesmente a pré-composição* $\phi \circ \mathbf{f}$.

**Proposição 3.5 Propriedades do “pull-back”:**

*(i)* $\mathbf{f}^*(\omega + \eta) = \mathbf{f}^*\omega + \mathbf{f}^*\eta$;

*(ii)* $\mathbf{f}^*(\omega \wedge \eta) = \mathbf{f}^*\omega \wedge \mathbf{f}^*\eta$;

*(iii)* $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})^*(\omega) = \mathbf{f}^*(\mathbf{g}^*\omega)$.

**Dem:** Exercício. $\square$

**Definição 3.6** *Se* $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$,

$$\omega \;=\; \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1 \ldots i_k}(\mathbf{x})\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

*então a sua* **derivada exterior** *é a forma-*$(k+1)$ $d\omega \in \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ *definida por*

$$d\omega \;=\; \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^i}\, dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

**Exemplo 3.7**

1. *A derivada exterior de uma forma-*$0$ $\phi$ *é a forma-*$1$

$$d\phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\, dx^i.$$

   *Em cada ponto, esta forma-*$1$ *é a transformação linear representada pela matriz Jacobiana de* $\phi$, *ou seja, é a derivada de* $\phi$. *Em particular, a derivada exterior da função* $x^i$ *é* $dx^i$, *o que justifica a notação para a base de* $(\mathbb{R}^n)^*$.

2. *Outra maneira de pensar na derivada exterior de uma forma-*$0$ $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é como sendo a forma-*$1$ *que corresponde ao gradiente de* $\phi$:

$$d\phi = \omega_{\operatorname{grad} \phi}.$$

3. *Se* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *é um campo vetorial de classe* $C^\infty$ *então*

$$d\omega_{\mathbf{F}} = \Omega_{\operatorname{rot}\mathbf{F}}$$

*e*

$$d\Omega_{\mathbf{F}} = (\operatorname{div}\mathbf{F})\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

*As formas diferenciais fornecem um método rápido de cálculo de rotacionais: por exemplo, se* $\mathbf{F} = (-y, x, z)$ *então* $\omega_{\mathbf{F}} = -ydx + xdy + zdz$, *donde*

$$\Omega_{\operatorname{rot}\mathbf{F}} = d\omega_{\mathbf{F}} = -dy \wedge dx + dx \wedge dy = 2dx \wedge dy,$$

*e portanto* $\operatorname{rot}\mathbf{F} = (0, 0, 2)$.

**Proposição 3.8 Propriedades da derivada exterior:**

*(i)* $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$;

*(ii)* $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$ *se* $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$;

*(iii)* $d(d\omega) = 0$;

*(iv)* $\mathbf{f}^*(d\omega) = d(\mathbf{f}^*\omega)$.

**Dem:** (i) e (ii) são imediatas. Para provar (iii), note-se que

$$d(d\omega) = d \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^i}\, dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$
$$\sum_{i_1 < \ldots < i_k} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^j \partial x^i}\, dx^j \wedge dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Pelo Lema de Schwarz

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^j \partial x^i}\, dx^j \wedge dx^i = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^i \partial x^j}\, dx^j \wedge dx^i = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^i \partial x^j}\, dx^i \wedge dx^j,$$

pelo que esta expressão se anula, e consequentemente $d(d\omega) = 0$.

Para provar (iv), notamos que para formas-0 $\phi$ se tem

$$d(\mathbf{f}^*\phi)(\mathbf{v}) = d(\phi \circ \mathbf{f})(\mathbf{v}) = d\phi(D\mathbf{f}(\mathbf{v})) = (\mathbf{f}^* d\phi)(\mathbf{v}).$$

Em particular temos

$$d(\mathbf{f}^*(d\phi)) = d(d(\mathbf{f}^*\phi)) = 0 = \mathbf{f}^*(d(d\phi)),$$

pelo que (iv) vale também para formas-1 do tipo $d\phi$. Como qualquer forma-$k$ pode ser construida a partir de formas-0 e das formas-1 $dx^1, \ldots, dx^n$ usando produtos exteriores e somas, é fácil ver que (iv) vale para qualquer forma-$k$. □

**Exemplo 3.9**

*(i) Se* $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *é um campo escalar então* $d(d\phi) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\phi) = \mathbf{0}$.

*(ii) Se* $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *é um campo vetorial então* $d(d\omega_{\mathbf{F}})=0\Leftrightarrow \operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F})=0$.

**Definição 3.10** *Dizemos que* $\omega\in\Omega^k(\mathbb{R}^n)$ *é:*

*(i)* **fechada** *se* $d\omega=0$*;*

*(ii)* **exacta** *se* $\omega=d\eta$ *para* $\eta\in\Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ *(dito um* **potencial** *para* $\omega$*).*

**Proposição 3.11** *Se* $\omega\in\Omega^k(\mathbb{R}^n)$ *é exacta então* $\omega$ *é fechada.*

**Dem:** Óbvia. □

**Nota 3.12** *Mais geralmente, podemos considerar o conjunto* $\Omega^k(U)$ *das formas-*$k$ *cujo domínio é um conjunto aberto* $U\subset\mathbb{R}^n$*. A relação entre formas fechadas e formas extaras em* $U$ *depende crucialmente da topologia de* $U$*.*

**Teorema 3.13 (Lema de Poincaré)** *Se* $\omega\in\Omega^k(U)$ *é fechada e o conjunto aberto* $U$ *é em estrela então* $\omega$ *é exacta.*

**Dem:** Supomos sem perda de generalidade que $\mathbf{0}$ é um centro de $U$. Se

$$\omega(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i_1<\ldots<i_k}\omega_{i_1\ldots i_k}(\mathbf{x})\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k},$$

definimos $I\Omega\in\Omega^{k-1}(U)$ mediante

$$I\omega(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i_1<\ldots<i_k}\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l-1}\left(\int_0^1 t^{k-1}\omega_{i_1\ldots i_k}(t\mathbf{x})\,dt\right)x^{i_l}\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^{i_l}}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$$

(onde $\widehat{\ }$ significa omissão). Temos

$$\omega=d(I\omega)+I(d\omega),$$

e portanto se $d\omega=0$ então $\omega=d(I\omega)$. □

**Exemplo 3.14**

*(i) Se* $\mathbf{F}:U\to\mathbb{R}^n$ *é um campo fechado e* $U\subset\mathbb{R}^n$ *é em estrela então existe* $\phi:U\to\mathbb{R}$ *tal que* $\mathbf{F}=\operatorname{grad}\phi$.

*(ii) Se* $\mathbf{F}:U\to\mathbb{R}^3$ *é um campo vetorial com* $\operatorname{div}\mathbf{F}=0$ *e* $U\subset\mathbb{R}^3$ *é em estrela então existe* $\mathbf{A}:U\to\mathbb{R}^3$ *tal que* $\mathbf{F}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$.

As formas diferenciais fornecem um método rápido de cálculo de potenciais vetores: por exemplo, se $\mathbf{F}=(2y,2z,0)$ então

$$\Omega_{\mathbf{F}}=2y\,dy\wedge dz+2z\,dz\wedge dx=d\left(y^2\right)\wedge dz+d\left(z^2\right)\wedge dx=d\left(y^2dz+z^2dx\right),$$

e portanto um potencial vetor para $\mathbf{F}$ é $\mathbf{A}=\left(z^2,0,y^2\right)$.

## 4 Integração e Teorema de Stokes

**Proposição 4.1** *Se* $\mathbf{g} : U \subset \mathbb{R}^m \to M$ *e* $\mathbf{h} : V \subset \mathbb{R}^m \to M$ *são parametrizações da variedade-*$m$ $M \subset \mathbb{R}^n$ *então* $\mathbf{h}^{-1} \circ \mathbf{g}$ *é um* **difeomorfismo** *(bijeção* $C^\infty$ *com inversa* $C^\infty$*).*

**Dem:** Uma vez que $\mathbf{g}$ e $\mathbf{h}$ são injetivas, $\mathbf{h}^{-1} \circ \mathbf{g}$ é bijetiva no seu domínio. Como as colunas de $D\mathbf{g}$ e $D\mathbf{h}$ geram o mesmo espaço vetorial em cada ponto (espaço tangente), existe uma única matriz $m \times m$ não singular $A$ tal que $D\mathbf{g} = D\mathbf{h} \cdot A$. É fácil verificar que $A = D(\mathbf{h}^{-1} \circ \mathbf{g})$, e o Teorema da Função Inversa garante então que $\mathbf{h}^{-1} \circ \mathbf{g}$ é um difeomorfismo. $\square$

**Definição 4.2** *Dizemos que duas parametrizações* $\mathbf{g} : U \subset \mathbb{R}^m \to M$ *e* $\mathbf{h} : V \subset \mathbb{R}^m \to M$ *da variedade-*$m$ $M \subset \mathbb{R}^n$ *induzem a* **mesma orientação** *se* $\det D(\mathbf{h}^{-1} \circ \mathbf{g}) > 0$, *e* **orientações opostas** *se* $\det D(\mathbf{h}^{-1} \circ \mathbf{g}) < 0$. *A variedade* $M$ *diz-se* **orientável** *se é possível escolher parametrizações cujas imagens cobrem* $M$ *e que induzem todas a mesma orientação. Uma* **orientação** *numa variedade orientável é uma escolha de uma família maximal de parametrizações nestas condições, que se dizem* **positivas**. *Uma variedade orientável com uma escolha de orientação diz-se* **orientada**.

**Definição 4.3** *Se* $\mathbf{g} : U \subset \mathbb{R}^m \to M$ *é uma parametrização positiva da variedade-*$m$ *orientada* $M \subset \mathbb{R}^n$ *e* $\omega \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$, *define-se o* **integral** *de* $\omega$ *ao longo de* $\mathbf{g}(U)$ *(que supomos limitado) mediante*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{g}(U)} \omega &= \int_U \omega(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^m} \right) dt^1 \ldots dt^m \\ &= \int_U \mathbf{g}^* \omega \left( \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m \right) dt^1 \ldots dt^m.\end{aligned}$$

**Nota 4.4** *Se pensarmos num conjunto aberto* $U \subset \mathbb{R}^n$ *como uma variedade de dimensão* $n$ *parametrizada pela aplicação identidade (que tomamos como positiva), esta definição implica*

$$\int_U f(\mathbf{x})\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \int_U f(\mathbf{x})\, dx^1 \ldots dx^n,$$

*e portanto*

$$\int_{\mathbf{g}(U)} \omega = \int_U \mathbf{g}^* \omega.$$

**Exemplo 4.5**

1. *Se* $M \subset \mathbb{R}^n$ *é uma variedade-*$1$ *e* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é um campo vetorial então*

$$\int_M \omega_{\mathbf{F}} = \int_a^b \omega_{\mathbf{F}}(\mathbf{g}(t)) \left( \frac{d\mathbf{g}}{dt}(t) \right) dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{g}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{g}}{dt}(t)\, dt = \int_M \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g}$$

   *é o integral de linha de* $\mathbf{F}$ *ao longo de* $M$. *Note-se que neste caso a escolha de orientação é a escolha do sentido em que a curva é percorrida.*

2. *Se* $M \subset \mathbb{R}^3$ *é uma variedade-*$2$ *e* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *é um campo vetorial então*

$$\int_M \Omega_{\mathbf{F}} = \int_U \Omega_{\mathbf{F}}(\mathbf{g}(u,v)) \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v} \right) du\, dv = \int_U \mathbf{F}(\mathbf{g}(u,v)) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v} \right) du\, dv = \int_M \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle$$

   *é o fluxo de* $\mathbf{F}$ *através de* $M$. *Note-se que neste caso a escolha de orientação é a escolha da normal unitária.*

**Proposição 4.6** *O integral de uma forma-$m$ na imagem de uma parametrização positiva de uma variedade-$m$ orientada está bem definido, ou seja, não depende da escolha de parametrização.*

**Dem:** Começamos por ver que a definição é consistente para integrais em variedades-$n$: se $U, V \subset \mathbb{R}^n$ são conjuntos abertos, $\omega = f dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ e $\mathbf{g} : U \to V$ é um difeomorfismo positivo então

$$\begin{aligned}
&\int_U f(\mathbf{g}(\mathbf{t}))\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^n}\right) dt^1 \ldots dt^n \\
&\qquad = \int_U f(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \det \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^n}\right) dt^1 \ldots dt^n \\
&\qquad = \int_U f(\mathbf{g}(\mathbf{t}))(\det D\mathbf{g})\, dt^1 \ldots dt^n \\
&\qquad = \int_U f(\mathbf{g}(\mathbf{t}))\, |\det D\mathbf{g}|\, dt^1 \ldots dt^n \\
&\qquad = \int_V f(\mathbf{x})\, dx^1 \ldots dx^n
\end{aligned}$$

pelo Teorema de Mudança de Variáveis.

Seja agora $M$ uma variedade-$m$ orientada, sejam $\mathbf{g} : U \subset \mathbb{R}^m \to M$ e $\mathbf{h} : V \subset \mathbb{R}^m \to M$ duas parametrizações positivas com a mesma imagem (de modo que $\mathbf{g} = \mathbf{h} \circ \mathbf{k}$ para algum difeomorfismo $\mathbf{k} : U \to V$), e seja $\omega \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$. Usando o resultado acima,

$$\int_U \mathbf{g}^* \omega = \int_U (\mathbf{h} \circ \mathbf{k})^* \omega = \int_U \mathbf{k}^*(\mathbf{h}^* \omega) = \int_V \mathbf{h}^* \omega$$

□

**Definição 4.7** *Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade-$m$ limitada e orientada e $\omega \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$, definimos*

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^N \int_{\mathbf{g}_i(U_i)} \omega,$$

*onde $\mathbf{g}_i : U_i \to M$ são parametrizações positivas cujas imagens são disjuntas e cobrem $M$ à exceção da união um número finito de variedades de dimensão inferior a $m$.*

É possível provar que é sempre possível obter um número finito de parametrizações desta forma, e que a definição acima não depende da escolha destas parametrizações.

**Definição 4.8** *Informalmente, uma* **variedade-$m$ com bordo** *é um subconjunto $M \subset N$ de uma variedade $N \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão $m$ delimitado por uma variedade $\partial M \subset M$ de dimensão $(m-1)$, dita o* **bordo** *de $M$, tal que $M \setminus \partial M$ é ainda uma variedade-$m$. Dizemos que $M$ é* **orientável** *se $N$ é orientável. Se $M$ é orientada, a* **orientação induzida** *em $\partial M$ é a orientação definida da seguinte forma: se $\mathbf{g} : U \cap \{t^1 \leq 0\} \to M$ é uma parametrização positiva de $M$ tal que $\mathbf{h}(t^2, \ldots, t^m) = \mathbf{g}(0, t^2, \ldots, t^m)$ é uma parametrização de $\partial M$, então $\mathbf{h}$ é positiva. Além disso, se $\omega \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$, definimos*

$$\int_M \omega = \int_{M \setminus \partial M} \omega.$$

**Nota 4.9** *Uma variedade é um caso particular de uma variedade com bordo, mas uma variedade com bordo em geral não é uma variedade.*

**Teorema 4.10 (Stokes)** *Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade-$m$ com bordo compacta e orientável e $\omega \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ então*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

*onde $\partial M$ tem a orientação induzida.*

**Dem:** Assumimos que podemos decompor $M$ em imagens de cubos por parametrizações positivas. Como integrais ao longo de faces adjacentes correspondem a orientações opostas, e portanto cancelam, podemos supor sem perda de generalidade que $M$ é a imagem de um cubo.

Seja $\mathbf{g} : [0,1]^m \to M$ a parametrização. Uma vez que

$$\int_M d\omega = \int_{[0,1]^m} \mathbf{g}^*(d\omega) = \int_{[0,1]^m} d(\mathbf{g}^*\omega)$$

e

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial[0,1]^m} \mathbf{g}^*\omega,$$

basta provar o Teorema de Stokes no caso em que $M = [0,1]^m$. Se $\omega \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^m)$ então

$$\omega = \sum_{i=1}^m \omega_i(\mathbf{x})\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^m,$$

e portanto

$$d\omega = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]^m} d\omega &= \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^m} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m \\
&= \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^m} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}\, dx^1 \ldots dx^m \\
&= \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \left( \int_{\{x^i=1\}} \omega_i\, dx^1 \ldots \widehat{dx^i} \ldots dx^m - \int_{\{x^i=0\}} \omega_i\, dx^1 \ldots \widehat{dx^i} \ldots dx^m \right) \\
&= \int_{\partial[0,1]^m} \omega,
\end{aligned}$$

onde usámos a definição de orientação induzida (note-se que cada troca de funções coordenadas inverte a orientação). $\square$

**Corolário 4.11** *Se $M$ é uma variedade-$m$ (sem bordo) compacta e orientável e $\omega \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ então*

$$\oint_M d\omega = 0.$$

**Exemplo 4.12** *Se $M$ é um domínio regular em $\mathbb{R}^2$ e $\omega = Pdx + Qdy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$, temos*

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy,$$

*e portanto o Teorema de Stokes reduz-se ao Teorema de Green:*

$$\iint_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \oint_{\partial M} Pdx + Qdy.$$

**Exemplo 4.13** *Todo o Cálculo Vetorial em $\mathbb{R}^3$ pode ser reinterpretado em termos de formas diferenciais:*

*(i) Produtos:*

$$\begin{aligned}
&\omega_{\phi\mathbf{F}} = \phi\,\omega_{\mathbf{F}};\\
&\Omega_{\phi\mathbf{F}} = \phi\,\Omega_{\mathbf{F}};\\
&\Omega_{\mathbf{F}\times\mathbf{G}} = \omega_{\mathbf{F}} \wedge \omega_{\mathbf{G}};\\
&(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})dx \wedge dy \wedge dz = \Omega_{\mathbf{F}} \wedge \omega_{\mathbf{G}} = \omega_{\mathbf{F}} \wedge \Omega_{\mathbf{G}}.
\end{aligned}$$

*(ii) Derivadas:*

$$\begin{aligned}
&\omega_{\operatorname{grad}\phi} = d\phi;\\
&\Omega_{\operatorname{rot}\mathbf{F}} = d\omega_{\mathbf{F}};\\
&(\operatorname{div}\mathbf{F})\,dx \wedge dy \wedge dz = d\Omega_{\mathbf{F}}.
\end{aligned}$$

*(iii) Integrais:*

$$\begin{aligned}
\int_M \mathbf{F}\cdot d\mathbf{g} &= \int_M \omega_{\mathbf{F}};\\
\int_M \mathbf{F}\cdot \mathbf{n} &= \int_M \Omega_{\mathbf{F}}.
\end{aligned}$$

*(iv) Teoremas sobre derivadas:*

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\phi) = \mathbf{0} \quad &\Leftrightarrow \quad d(d\phi) = 0;\\
\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad d(d\omega_{\mathbf{F}}) = 0.
\end{aligned}$$

*(v) Teoremas sobre integrais:*

$$\begin{aligned}
\int_M \operatorname{grad}\phi \cdot d\mathbf{g} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}) \quad &\Leftrightarrow \quad \int_M d\phi = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a});\\
\iint_M \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \oint_{\partial M} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dg} \quad &\Leftrightarrow \quad \int_M d\omega_{\mathbf{F}} = \oint_{\partial M} \omega_{\mathbf{F}};\\
\iiint_M \operatorname{div}\mathbf{F} = \oiint_{\partial M} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} \quad &\Leftrightarrow \quad \int_M d\Omega_{\mathbf{F}} = \oint_{\partial M} \Omega_{\mathbf{F}}.
\end{aligned}$$

# 5 Cálculo vetorial em coordenadas curvilíneas

Se $\mathbf{g} : U \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação de coordenadas então podemos pensar nas novas coordenadas $t^1, \ldots, t^n$ como campos escalares em $\mathbb{R}^n$. Tem-se

$$dt^i \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^j} \right) = \frac{\partial t^i}{\partial t^j} = \delta_{ij},$$

onde $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ (**delta de Kronecker**). Definindo as formas-1

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} dt^j,$$

onde

$$g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^j}$$

são as componentes da **matriz da métrica** $G$, vemos que

$$\omega_i \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^j} \right) = g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^j},$$

ou seja, $\omega_i$ é a forma-1 associada a $\dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^j}$.

**Exemplo 5.1** *Recorde-se que as* **coordenadas cilíndricas** *em* $\mathbb{R}^3$ *correspondem à transformação de coordenadas* $\mathbf{g} : \mathbb{R}^+ \times ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *dada por*

$$\mathbf{g}(\rho, \varphi, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \operatorname{sen} \varphi, z).$$

*A matriz da métrica vem*

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*e portanto* $\left\{ \dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial \rho}, \dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varphi}, \dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial z} \right\}$ *é uma base ortogonal associada às formas* $\{d\rho, \rho^2 d\varphi, dz\}$. *A respectiva base ortonormal* $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$ *satisfaz*

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_\rho &= \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \rho} \sim d\rho \sim \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z \sim \rho \, d\varphi \wedge dz; \\
\mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varphi} \sim \rho \, d\varphi \sim \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho \sim dz \wedge d\rho; \\
\mathbf{e}_z &= \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z} \sim dz \sim \mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\varphi \sim \rho \, d\rho \wedge d\varphi
\end{aligned}$$

*(onde escrevemos* $\mathbf{F} \sim \omega_{\mathbf{F}} \sim \Omega_{\mathbf{F}}$*). Temos ainda*

$$\rho \, d\rho \wedge d\varphi \wedge dz = (\mathbf{e}_\rho \cdot (\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z)) \, dx \wedge dy \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz.$$

*Para calcular, por exemplo,*

$$\triangle\phi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi)$$

*em coordenadas cilíndricas, notamos que*

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\phi \sim d\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\,d\rho + \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\,d\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial z}\,dz \\ &\sim \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\,\rho\,d\varphi\wedge dz + \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\,\frac{1}{\rho}\,dz\wedge d\rho + \frac{\partial\phi}{\partial z}\,\rho\,d\rho\wedge d\varphi,\end{aligned}$$

*pelo que*

$$\begin{aligned}\triangle\phi\,\rho\,d\rho\wedge d\varphi\wedge dz &= d\left(\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\,\rho\,d\varphi\wedge dz + \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\,\frac{1}{\rho}\,dz\wedge d\rho + \frac{\partial\phi}{\partial z}\,\rho\,d\rho\wedge d\varphi\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \rho\,\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)d\rho\wedge d\varphi\wedge dz,\end{aligned}$$

*ou seja:*

$$\triangle\phi = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}.$$

**Exemplo 5.2** *Recorde-se que as* **coordenadas esféricas** *em* $\mathbb{R}^3$ *correspondem à transformação de coordenadas* $\mathbf{g} : \mathbb{R}^+ \times \,]0,\pi[\, \times \,]0,2\pi[\, \to \mathbb{R}^3$ *dada por*

$$\mathbf{g}(r,\theta,\varphi) = (r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, r\cos\theta).$$

*A matriz da métrica vem*

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix}$$

*e portanto* $\left\{\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial r}, \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\theta}, \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\varphi}\right\}$ *é uma base ortogonal associada às formas* $\left\{dr, r^2 d\theta, r^2\operatorname{sen}^2\theta d\varphi\right\}$. *A respectiva base ortonormal satisfaz*

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial r} \sim dr \sim \mathbf{e}_\theta\times\mathbf{e}_\varphi \sim r^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta\wedge d\varphi; \\ \mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\theta} \sim r\,d\theta \sim \mathbf{e}_\varphi\times\mathbf{e}_r \sim r\operatorname{sen}\theta\,d\varphi\wedge dr; \\ \mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\varphi} \sim r\operatorname{sen}\theta\,d\varphi \sim \mathbf{e}_r\times\mathbf{e}_\theta \sim r\,dr\wedge d\theta.\end{aligned}$$

*Temos ainda*

$$r^2\operatorname{sen}\theta\,dr\wedge d\theta\wedge d\varphi = (\mathbf{e}_r\cdot(\mathbf{e}_\theta\times\mathbf{e}_\varphi))\,dx\wedge dy\wedge dz = dx\wedge dy\wedge dz.$$

*Para calcular, por exemplo,*

$$\triangle\phi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi)$$

*em coordenadas esféricas, notamos que*

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\phi \sim d\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial r}\,dr + \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\,d\theta + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\,d\varphi \\ &\sim \frac{\partial \phi}{\partial r}\,r^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta \wedge d\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\,\operatorname{sen}\theta\,d\varphi \wedge dr + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\,\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,dr \wedge d\theta,\end{aligned}$$

*pelo que*

$$\begin{aligned}\triangle\phi\,r^2 \operatorname{sen}\theta\,dr \wedge d\theta \wedge d\varphi &= d\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\,r^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta \wedge d\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\,\operatorname{sen}\theta\,d\varphi \wedge dr + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\,\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,dr \wedge d\theta\right) \\ &= \left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}\right) dr \wedge d\theta \wedge d\varphi,\end{aligned}$$

*ou seja:*

$$\triangle\phi = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}.$$