Forma canónica de Jordan

É sabido que há matrizes que não são diagonalizáveis. No entanto é possível mostrar que essas matrizes são semelhantes a uma matriz com uma forma bastante simples denominada por *forma canónica de Jordan* (ou simplesmente forma de Jordan).

Estas notas pretendem enunciar o teorema que dá a forma de Jordan de uma matriz, e em paralelo identificar alguns passos importantes na determinação da forma canónica de Jordan de uma matriz. No final destas notas apresentamos a demonstração do teorema respectivo a qual pode ser igualmente encontrada no livro de texto [1] (prova esta inspirada em[2]).

Definição 1.1. Um bloco de Jordan é uma matriz quadrada triangular superior com todas as entradas na diagonal principal iguais e onde todas as outras entradas são nulas excepto as entradas da diagonal acima da principal (supradiagonal), que são iguais a 1. Isto é, uma matriz da forma

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}.$$

Uma matriz J diz-se que está na forma canónica de Jordan se é uma matriz diagonal por blocos, e cada bloco $J(\lambda_i)$ é ainda uma matriz diagonal por blocos em que os blocos são blocos de Jordan. Ou seja, J é da forma

$$J = \begin{bmatrix} J(\lambda_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J(\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J(\lambda_s) \end{bmatrix},$$

onde cada matriz $J(\lambda_i)$ é constituída por blocos de Jordan.

Exemplo 1.1. Considere a forma de Jordan

$$J = \begin{bmatrix} \begin{array}{ccc|} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ \hline \end{array} & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{matrix}} & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & & \\ & & & \boxed{3} & \\ & & & & \boxed{3} \end{bmatrix},$$

onde as entradas omissas são zeros.

A matriz J é 9×9 e triangular superior, pelo que facilmente se obtém o seu espectro: $\sigma(J) = \{5, 2, 3\}$.

Os valores próprios $5, 2, 3$ têm respectivamente multiplicidades algébricas iguais a 5, 2 e 2. Os blocos $J(\lambda_i)$ em J são $J(5)$, $J(2)$, $J(3)$, dados por

$$J(5) = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad J(2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad J(3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Cada bloco $J(\lambda_i)$ é do tipo $k \times k$, onde k é a multiplicidade algébrica de λ_i. As matrizes $J(\lambda_i)$ são formadas por blocos de Jordan: (i) $J(5)$ tem dois blocos de Jordan; (ii) $J(2)$ tem um bloco de Jordan; (iii) $J(3)$ tem dois blocos de Jordan (blocos 1×1). ♦

Note-se que há textos que consideram os blocos de Jordan como tendo a diagonal de 1's imediatamente abaixo da diagonal principal, em vez de situados na supradiagonal. Como veremos, isso corresponde a uma ordenação diferente dos vetores das cadeias de Jordan.

O teorema seguinte dá-nos a forma canónica de Jordan de uma matriz.

Teorema 1.1. Seja A uma matriz de ordem n, com espectro $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s\}$. Designe-se por $m_a(\lambda)$, $m_g(\lambda)$, respectivamente, a multiplicidade algébrica e geométrica de um valor próprio λ de A.

A matriz A é semelhante a uma matriz de Jordan J. Ou seja, existe uma matriz invertível P, tal que

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} J(\lambda_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J(\lambda_2) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & J(\lambda_s) \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Cada bloco $J(\lambda_i)$ em J verifica:

1. $J(\lambda_i)$ é do tipo $k \times k$, onde $m_a(\lambda_i) = k$;

2. $J(\lambda_i)$ tem $t_i = \dim N(A - \lambda_i I) = m_g(\lambda_i)$ blocos de Jordan:

$$J(\lambda_i) = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_i) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2(\lambda_i) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & J_{t_i}(\lambda_i) \end{bmatrix}, \text{ com } \quad J_r(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

3. A ordem do maior bloco de Jordan em $J(\lambda_i)$ é igual ao índice de λ_i.

4. O número de blocos do tipo $j \times j$ em $J(\lambda_i)$ é igual a

$$\operatorname{car}(A - \lambda_i I)^{j-1} - 2\operatorname{car}(A - \lambda_i I)^{j} + \operatorname{car}(A - \lambda_i I)^{j+1}. \tag{1.2}$$

A matriz J é designada por *forma canónica de Jordan* de A. A menos de uma reordenação de blocos (em J e em $J(\lambda_i)$) a matriz J é única. A matriz P não é única. ◇

Como veremos adiante, a determinação da forma de Jordan de uma matriz pode exigir algum esforço computacional, em particular se se pretende efectuar os cálculos manualmente. No entanto, existe um algoritmo que permite o cálculo da forma de Jordan e há sistemas de programação simbólica, como o *Mathematica*, que já disponibilizam este algoritmo integrado no sistema.

Nos casos em que a matriz tem uma ordem pequena (e.g. ordem 3), nem sempre é necessário usar toda a informação do teorema para encontrar a sua forma de Jordan. No exemplo que se segue vemos que apenas é necessário conhecer as multiplicidades algébricas e geométricas dos valores próprios para determinar a forma de Jordan da matriz.

Exemplo 1.2. Considere-se

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

A matriz A tem um único valor próprio $\lambda = 4$ com multiplicidade geométrica $m_g(4) = 2$, já que

$$N(A - 4I) = \operatorname{Span}\{(0,0,1), (1,1,0)\}. \tag{1.3}$$

Pelo Teorema 1.1 a forma de Jordan J de A tem dois blocos (já que $m_g(4) = 2$), sendo:

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \tag{1.4}$$

a menos de uma ordenação dos blocos. Pretendemos determinar uma matriz P tal que $A = PJP^{-1}$. Suponhamos que as colunas de P são os vectores $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{w}$. Calculando AP e PJ obtemos

$$AP = A \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{w} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ A\mathbf{u}_1 & A\mathbf{u}_2 & A\mathbf{w} \\ | & | & | \end{bmatrix},$$

$$PJ = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{w} \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ 4\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2 & 4\mathbf{w} \\ | & | & | \end{bmatrix}.$$

Como $A = PJP^{-1}$ é equivalente a $AP = PJ$, das expressões anteriores conclui-se que os vetores coluna de P verificam

$$A\mathbf{u}_1 = 4\mathbf{u}_1, \qquad A\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2, \quad A\mathbf{w} = 4\mathbf{w}.$$

Ou seja,

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{w} \in N(A - 4I), \quad \text{e} \quad (A - 4I)\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1. \tag{1.5}$$

Os vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{w}$ formam uma base do espaço próprio de $\lambda = 4$ (note que P é invertível) e o vetor $\mathbf{u}_2$ é construído a partir de $\mathbf{u}_1$, resolvendo o sistema $(A - 4I)\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1$ para $\mathbf{u}_2$.

Uma base de $N(A - 4I)$ é $\{(0, 0, 1), (1, 1, 0)\}$, e poderíamos pensar em escolher para $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{w}$ os vetores desta base. Porém, isso nem sempre é possível pois que, se por exemplo tomarmos $\mathbf{u}_1 = (0, 0, 1)$, não existe $\mathbf{u}_2$ que verifica $(A - 4I)\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1$.

Note-se que a igualdade $(A - 4I)\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1$ diz-nos ainda que $\mathbf{u}_1$ pertence ao espaço das colunas de $(A-4I)$. Ou seja, o vetor $\mathbf{u}_1 \in EC(A-4I) \cap N(A-4I)$. Como o espaço das colunas de $(A - 4I)$ é:

$$A - 4I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow EC(A - 4I) = \operatorname{Span}\{(1, 1, 0)\},$$

um vetor $\mathbf{u}_1 \in EC(A - 4I) \cap N(A - 4I)$ é $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0)$.

Resolvendo agora $(A - 4I)\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1$ obtemos vetores $\mathbf{u}_2 = (a, b, c)$ tais que $a - b = 1$, e por isso podemos considerar $\mathbf{u}_2 = (1, 0, 0)$. Logo, uma matriz P tal que $A = PJP^{-1}$ é

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O vetor $\mathbf{u}_2$ (construído a partir de $\mathbf{u}_1$) designa-se por *vetor próprio generalizado*. O conjunto $\mathcal{I}_{\mathbf{u}_1} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ designa-se por *cadeia de Jordan* (sobre $\mathbf{u}_1$).

Observe-se ainda que os vetores dessa cadeia de Jordan verificam (1.5):

- $\mathbf{u}_1 \in N(A - 4I) \cap EC(A - 4I), \quad \mathbf{u}_2 \in N(A - 4I)^2 \setminus N(A - 4I)$.

♦

No exemplo que se segue mostramos que para matrizes de ordem superior a 3, nem sempre é possível identificar a forma de Jordan usando apenas as multiplicidades algébricas e geométricas. Para tal, necessitamos de calcular o índice do valor próprio (ver Definição 1.2).

Exemplo 1.3. Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz tem um único valor próprio $\lambda = 4$ de multiplicidades: $m_a(4) = 4$, $m_g(4) = 2$. A matriz não é diagonalizável ($m_a(4) \neq m_g(4)$) e pelo Teorema 1.1 a sua forma de Jordan tem dois blocos, já que $m_g(4) = 2$. Porém, sem usar o índice do valor próprio não sabemos se se deve considerar dois blocos de ordens 3 e 1, ou dois blocos 2×2. ♦

Definição 1.2 (Índice de λ)**.** Seja λ um valor próprio de A. O índice de λ é o menor inteiro k para o qual

$$N(A - \lambda I)^k = N(A - \lambda I)^{k+1}.$$

Equivalentemente, o índice de λ é o menor inteiro k tal que

$$EC\left((A - \lambda I)^k\right) = EC\left((A - \lambda I)^{k+1}\right).$$

◇

As observações que se seguem justificam a definição de índice de um valor próprio e são relevantes na demonstração do Teorema 1.1. Caso não esteja interessado na demonstração pode prosseguir com os exemplos e a leitura do Teorema 1.2 que completa o Teorema 1.1 explicitando a construção da matriz P.

Nota 1. *Observe-se que para uma qualquer matriz B, $n \times n$, se verificam as seguintes relações de inclusão do núcleos de potências:*

$$N(B) \subseteq N(B^2) \subseteq N(B^3) \subseteq \cdots \subseteq N(B^p) \subseteq \cdots \tag{1.6}$$

Para os espaços das colunas, temos

$$EC(B) \supseteq EC(B^2) \supseteq EC(B^3) \supseteq \cdots \supset EC(B^p) \supseteq \cdots \tag{1.7}$$

já que se $\mathbf{y} \in EC(B^r)$ *então* $\mathbf{y} = B^r\mathbf{x} = B^{r-1}(B\mathbf{x})$, *ou seja* $\mathbf{y} \in EC(B^{r-1})$.

No caso de B *ser uma matriz* **singular** *(i.e.* $N(B) \neq \{0\}$*) terá de existir uma potência a partir da qual as dimensões dos núcleos param de aumentar, já que sendo* B *de ordem finita* n, *a dimensão de* $N(B^k)$ *não pode exceder* n. *Analogamente, existe uma potência de* B *a partir da qual as dimensões dos espaços das colunas param de diminuir. Como* $\dim N(B^p) = n - \dim EC(B^p)$ *temos que a potência a partir da qual* $N(B^k) = N(B^{k+1})$ *é a mesma potência a partir da qual* $EC(B^k) = EC(B^{k+1})$. *Portanto, as relações de inclusão* (1.6) *e* (1.7) *são estritas.*

Nota 2. *Se* k *é o menor inteiro positivo tal que* $N(B^k) = N(B^{k+1})$ *e* $EC(B^k) = EC(B^{k+1})$, *então* $N(B^k)$ *e* $EC(B^k)$ *são espaços complementares. Ou seja,*

$$EC(B^k) \cap N(B^k) = \{0\}, \quad \textit{e} \quad \mathbb{C}^n = EC(B^k) \oplus N(B^k).$$

De facto, como $\dim N(B^k) + \dim EC(B^k) = n$ *e*

$$\begin{aligned}\dim\left[N(B^k) + EC(B^k)\right] &= \dim N(B^k) + \dim EC(B^k) - \dim\left[EC(B^k) \cap N(B^k)\right]\\ &= n \Longrightarrow EC(B^k) \cap N(B^k) = \{0\}.\end{aligned}$$

Define-se igualmente **índice de uma matriz** B *como sendo o menor inteiro positivo* k *para o qual* $N(B^k) = N(B^{k+1})$.

Exemplo 1.4 (Exemplo 1.3 cont.)**.** Determinemos o índice do valor próprio $\lambda = 4$ da matriz A do Exemplo 1.3.

p	$(A-4I)^p$	$N(A-4I)^p$
1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\operatorname{Span}\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$
2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\mathbb{R}^4$ (e $EC(A-4I)^p = \{\mathbf{0}\}$)

Assim, o índice de $\lambda = 4$ é 2 e portanto a ordem do maior bloco de Jordan é 2 (Teorema 1.1-3). Além disso, como o número de blocos de Jordan é 2 e A é 4×4, temos 2 blocos de Jordan 2×2. Ou seja, a forma canónica de Jordan de A é:

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Usando o item 4 do Teorema 1.1, nomeadamente a expressão (1.2), pode confirmar que de facto o número de blocos de Jordan do tipo 2×2 é dois.

Usando um procedimento análogo ao do Exemplo 1.2, determine-se agora uma matriz P tal que $A = PJP^{-1}$. Para tal, considere-se que $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ (por esta ordem) são as colunas de P. Efectuando os produtos AP e PJ e igualando, obtemos:

$$\begin{aligned} A\mathbf{u}_1 = 4\mathbf{u}_1 &\Longrightarrow (A - 4I)\mathbf{u}_1 = 0 \\ A\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 + 4\mathbf{u}_2 &\Longrightarrow (A - 4I)\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 \\ A\mathbf{v}_1 = 4\mathbf{v}_1 &\Longrightarrow (A - 4I)\mathbf{v}_1 = 0 \\ A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 &\Longrightarrow (A - 4I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1. \end{aligned}$$

Tomando para vetores próprios $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 0)$ e $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 1, 1)$ e resolvendo os sistemas acima, obtemos vetores próprios generalizados da forma $\mathbf{u}_2 = (b + 1/2 - 2d, b, 1/2 - d, d)$ e $\mathbf{v}_2 = (b - 2d + 1/2, b, -1/2 + d, d)$. Podemos considerar, $\mathbf{u}_2 = (1/2, 0, 1/2, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (1/2, 0, -1/2, 0)$, e por conseguinte

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note-se que neste caso temos duas cadeias de Jordan, uma construída sobre $\mathbf{u}_1$ e outra construída sobre $\mathbf{v}_1$:

$$\mathcal{I}_{\mathbf{u}_1} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \{(A - 4I)\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2\}, \quad \mathcal{I}_{\mathbf{v}_1} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{(A - 4I)\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2\}.$$

Pode ainda verificar que os vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1$ escolhidos pertencem ao espaço $EC(A - 4I) \cap N(A - 4I)$.

Observe-se ainda que sendo $\lambda = 4$ o único valor próprio de A, a matriz $(A - \lambda I)$ é uma *matriz nilpotente*, isto é, uma matriz N cujo o único valor próprio é zero (equivalentemente, $N^k = N^{k+1} = \mathbf{0}$ e $N^{k-1} \neq \mathbf{0}$). ♦

Segue-se um exemplo em que a matriz tem valores próprios distintos.

Exemplo 1.5. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

O espectro de A é $\sigma(A) = \{5, 2\}$ e $m_a(5) = 2$, $m_a(2) = 3$. As multiplicidades geométricas dos valores próprios são $m_g(5) = m_g(2) = 1$, com

$$N(A - 5I) = \text{Span}\left\{(1, 0, 1, 0, 0)\right\}, \quad N(A - 2I) = \text{Span}\left\{(0, 0, 1, 0, 1)\right\}.$$

Pelo Teorema 1.1 a forma canónica de Jordan tem dois blocos $J(5)$ e $J(2)$, respectivamente de ordens 2 e 3, sendo cada um destes blocos constituído por um bloco de Jordan (já que $m_g(5) = m_g(2) = 1$). Ou seja, a forma de Jordan de A é:

$$J = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Os vetores coluna $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ de uma matriz P tal que $A = PJP^{-1}$, verificam:

- $(A - 5I)\mathbf{u}_1 = 0$ e $(A - 5I)\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1$.
- $(A - 2I)\mathbf{v}_1 = 0$, $(A - 2I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ e $(A - 2I)\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$.

Considerando os vetores próprios $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 1, 0, 0)$ e $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 1, 0, 1)$ e determinando os vetores próprios generalizados $\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ resolvendo os sistemas acima, obtém-se as restantes colunas de P. Por exemplo,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pode facilmente confirmar que os índices dos valores próprios são: $ind(5) = 2$ e $ind(2) = 3$ (cf. Teorema 1.1-3). Para tal, não precisa de calcular as potências de $A - \lambda I$, basta calcular as potências de $(J - 5I)$ e $(J - 2I)$, uma vez que são matrizes semelhantes a A. Aconselha-se a que efectue o cálculo de potências de um bloco de Jordan para verificar como é fácil obter estas potências.

1.1 Demonstração do Teorema 1.1

A demonstração do Teorema 1.1 pode ser realizada fazendo primeiro a prova para o caso em que A tem um único valor próprio, e seguidamente usar esse resultado no caso de valores próprios distintos. Estamos nomeadamente interessados em provar os itens 3-4 doTeorema 1.1 sobre as ordens e número dos blocos de Jordan, bem como verificar que a demonstração construtiva aqui apresentada fornece um algoritmo de cálculo da forma canónica de Jordan.

Caso 1: A matriz A tem um único valor próprio

Seja A uma matriz com um único valor próprio λ, tal que $m_a(\lambda) = n$ e $m_g(\lambda) = t$. Suponha-se que o índice de λ é igual a k.
A matriz $(A - \lambda I)$ tem um único valor próprio que é o zero (ou seja, é nilpotente). Portanto, neste caso $EC(A - \lambda I)^k = \{0\}$.

A) Construa-se uma base de $N(A - \lambda I)$ da seguinte forma:

1. Considere-se os subespaços $M_i = EC(A - \lambda I)^i \cap N(A - \lambda I)$ e o seguinte encaixe de subespaços (cf. Nota 1) :

$$\{0\} = M_k \subset M_{k-1} \subset M_{k-2} \subset \cdots \subset M_1 \subset M_0 = N(A - \lambda I).$$

2. Seja S_{k-1} uma base de M_{k-1} e junte-se a S_{k-1} um conjunto de vetores S_{k-2} tal que $S_{k-1} \cup S_{k-2}$ é uma base para M_{k-2}. Seguidamente junte-se a $S_{k-1} \cup S_{k-2}$ o conjunto S_{k-3} tal que $S_{k-1} \cup S_{k-2} \cup S_{k-3}$ é base para M_{k-3}. Prosseguindo com este processo obtém-se a seguinte base de $N(A - \lambda I)$:

$$\mathcal{B} = S_{k-1} \cup S_{k-2} \cup \ldots \cup S_1 \cup S_0 = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_t\}.$$

B) Sobre cada vetor $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$ constrói-se uma cadeia de Jordan $\mathcal{I}_{\mathbf{b}}$:

Se $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$, então $\mathbf{b}$ pertence a um $S_i \subset M_i \subset EC(A-\lambda I)^i$ e portanto existe $\mathbf{x}$ tal que $(A-\lambda I)^i\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Esta cadeia é formada por:

$$\mathcal{I}_{\mathbf{b}} = \left\{ \underbrace{(A-\lambda I)^i\mathbf{x}}_{\mathbf{b}}, (A-\lambda I)^{i-1}\mathbf{x}, \cdots (A-\lambda I)\mathbf{x}, \mathbf{x} \right\},$$

onde o primeiro vetor é um vetor próprio e os restantes são vetores próprios generalizados.

C) É necessário provar:

(i) $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathbf{b}_1} \cup \mathcal{I}_{\mathbf{b}_2} \cup \cdots \cup \mathcal{I}_{\mathbf{b}_t}$ é uma base de $\mathbb{C}^n$, ou seja, que tem n vetores linearmente independentes.

Podemos contar facilmente o número de vetores em $\mathcal{I}$ usando o seguinte resultado sobre a característica do produto de duas matrizes:

$$\mathrm{car}(BC) = \mathrm{car}(C) - \dim(N(B) \cap EC(C)). \tag{1.8}$$

Assim, de (1.8) segue:

$$\begin{aligned} d_i = \dim M_i &= \dim \left(EC(A-\lambda I)^i \cap N(A-\lambda I)\right) \\ &= \mathrm{car}\left((A-\lambda I)^i\right) - \mathrm{car}\left((A-\lambda I)^{i+1}\right) = r_i - r_{i+1}. \end{aligned}$$

com $d_k = 0 = r_k$.

Por construção:

(a)

$$\begin{aligned} \dim S_i = \dim M_i - \dim M_{i+1} &= d_i - d_{i+1} \\ &= r_i - 2r_{i+1} + r_{i+2}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

(b) Cada cadeia de Jordan construída sobre cada vetor de S_i tem $i+1$ vetores. Portanto o número total de vetores em $\mathcal{I}$ é:

$$\begin{aligned} \#\mathcal{I} &= \sum_{j=0}^{k-1}(j+1)\dim S_j = \sum_{j=0}^{k-1}(j+1)(d_j - d_{j+1}) \\ &= d_0 - d_1 + 2(d_1 - d_2) + 3(d_2 - d_3) + \cdots + k(d_{k-1} - d_k) \\ &= d_0 + d_1 + \cdots + d_{k-1} \\ &= (r_0 - r_1) + (r_1 - r_2) + \cdots + (r_{k-1} - r_k) = r_0 = n. \end{aligned}$$

Para provar que os vetores em $\mathcal{I}$ são linearmente independentes basta mostrar: (1) cada cadeia de Jordan é linearmente independente; (2) cadeias de Jordan distintas são linearmente independentes.

De facto, como o número de vetores em $\mathcal{I}$ é n, seguirá de (1) e (2) que $\mathcal{I}$ é uma base de $\mathbb{C}^n$.

(1) Seja $\mathcal{I}_{\mathbf{b}_j}$ uma cadeia de Jordan construída sobre $\mathbf{b}_j \in S_i$:

$$\mathcal{I}_{\mathbf{b}_j} = \left\{ \underbrace{(A-\lambda I)^i \mathbf{x}}_{\mathbf{b}_j}, (A-\lambda I)^{i-1}\mathbf{x}, \ldots, (A-\lambda I)\mathbf{x}, \mathbf{x} \right\}. \qquad (1.10)$$

Considere-se a combinação linear

$$\alpha_i (A-\lambda I)^i \mathbf{x} + \alpha_{i-1}(A-\lambda I)^{i-1}\mathbf{x} + \cdots + \alpha_1 (A-\lambda I)\mathbf{x} + \alpha_0 \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Aplicando $(A-\lambda I)^i$ a esta combinação linear e notando que $\alpha_0(A-\lambda I)^i\mathbf{x} = \alpha_0 \mathbf{b}_j$, com $\mathbf{b}_j$ um vetor próprio de A, obtemos

$$0 + 0 + \cdots + 0 + \alpha_0 \mathbf{b}_j = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \alpha_0 = 0.$$

Aplicando agora $(A-\lambda I)^{i-1}$ à combinação linear, obtemos $\alpha_1 = 0$. Continuando a aplicar potências de ordem inferior temos $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots \alpha_i = 0$. Logo, $\mathcal{I}_{\mathbf{b}_j}$ é linearmente independente.

(2) O procedimento para mostrar que vetores de cadeias de Jordan construídas sobre vetores $\mathbf{b}_i$ do núcleo de $(A-\lambda I)$ (pertencentes ao mesmo S_i ou não) é análogo. Nomeadamente:

Se $\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_m \in S_i$, a cadeia $\mathcal{I}_{\mathbf{b}_j}$ é como em (1.10) e

$$\mathcal{I}_{\mathbf{b}_m} = \left\{ \underbrace{(A-\lambda I)^i \mathbf{y}}_{\mathbf{b}_m}, (A-\lambda I)^{i-1}\mathbf{y}, \ldots, (A-\lambda I)\mathbf{y}, \mathbf{y} \right\}.$$

Fazendo a combinação linear nula dos vetores de $\mathcal{I}_{\mathbf{b}_j} \cup \mathcal{I}_{\mathbf{b}_m}$, aplicando as mesmas potências de $(A-\lambda I)$ do caso anterior, e usando a independência linear de $\mathbf{b}_j$ e $\mathbf{b}_m$, obtemos que $\mathcal{I}_{\mathbf{b}_j} \cup \mathcal{I}_{\mathbf{b}_m}$ é linearmente independente.

Seja agora $\mathbf{b}_j \in S_i$ e $\mathbf{b}_m \in S_r$, com $r \neq i$. A cadeia $\mathcal{I}_{\mathbf{b}_j}$ é como em (1.10) e

$$\mathcal{I}_{\mathbf{b}_m} = \left\{ \underbrace{(A - \lambda I)^r \mathbf{y}}_{\mathbf{b}_m}, (A - \lambda I)^{r-1}\mathbf{y}, \ldots, (A - \lambda I)\mathbf{y}, \mathbf{y} \right\}.$$

Supondo que $r > i$, fazendo a combinação linear nula dos vetores de $\mathcal{I}_{\mathbf{b}_j} \cup \mathcal{I}_{\mathbf{b}_m}$ e aplicando sucessivamente a esta combinação linear potências $(A-\lambda I)^r$, $(A-\lambda I)^{r-1}$, etc., segue da independência linear de $\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_m$ que $\mathcal{I}_{\mathbf{b}_j} \cup \mathcal{I}_{\mathbf{b}_m}$ é linearmente independente.

(D) Mostrar que existe P tal que $P^{-1}AP = J$, com J na forma de Jordan.

Seja P a matriz cujas colunas são os vetores das cadeias de Jordan pela mesma ordem que aparecem em cada $\mathcal{I}_{\mathbf{b}_j}$. Isto é,

$$P = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathcal{I}_{\mathbf{b}_1} & \mathcal{I}_{\mathbf{b}_2} & \cdots & \mathcal{I}_{\mathbf{b}_t} \end{array} \right],$$

onde $\mathcal{I}_{\mathbf{b}_j}$ é uma matriz $n \times (i+1)$ se $\mathbf{b}_j \in S_i$, cujas colunas são os $i+1$ vetores em (1.10). A matriz $(A - \lambda I)P$ é:

$$(A - \lambda I)P = \left[\begin{array}{c|c|c|c} (A-\lambda I)\mathcal{I}_{\mathbf{b}_1} & (A-\lambda I)\mathcal{I}_{\mathbf{b}_2} & \cdots & (A-\lambda I)\mathcal{I}_{\mathbf{b}_t} \end{array} \right].$$

Calcule-se $(A - \lambda I)\mathcal{I}_{\mathbf{b}_j}$, onde $\mathbf{b}_j \in S_i$. Como $\mathbf{b}_j$ pertence ao núcleo de

$(A-\lambda I)$, temos

$$
\begin{aligned}
(A-\lambda I)\mathcal{I}_{\mathbf{b}_j} &= \begin{bmatrix} \vert & \vert & \cdots & \vert \\ \mathbf{0} & (A-\lambda I)^i\mathbf{x} & \cdots & (A-\lambda I)\mathbf{x} \\ \vert & \vert & \cdots & \vert \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \vert & \vert & \cdots & \vert \\ (A-\lambda I)^i\mathbf{x} & (A-\lambda I)^{i-1}\mathbf{x} & \cdots & \mathbf{x} \\ \vert & \vert & \cdots & \vert \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
&= \mathcal{I}_{\mathbf{b}_j} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{I}_{\mathbf{b}_j} N_j .
\end{aligned}
$$

Por conseguinte,

$$
(A-\lambda I)P = P \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & N_t \end{bmatrix},
$$

com N_j da forma acima. Equivalentemente,

$$
AP = P \begin{bmatrix} \lambda I + N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda I + N_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda I + N_t \end{bmatrix} = PJ.
$$

Desta demonstração segue que cada $\mathbf{b}_j$ pertencente a S_i dá origem a um bloco de Jordan do tipo $(i+1)\times(i+1)$. Por conseguinte, o número de blocos do tipo $p\times p$ é igual à dimensão de S_{p-1} dada em (1.9). Isto é,

$$
\begin{aligned}
\dim S_{p-1} &= r_{p-1} - 2r_p + r_{p+1} \\
&= \operatorname{car}\left((A-\lambda I)^{p-1}\right) - 2\operatorname{car}\left((A-\lambda I)^{p}\right) + \operatorname{car}\left((A-\lambda I)^{p+1}\right),
\end{aligned}
$$

o que prova item 4 do Teorema 1.1. Além disso, a ordem do(s) maior(es) blocos de Jordan em J é igual à dimensão da(s) cadeia(s) de Jordan construída(s) sobre vetores de S_{k-1}, ou seja igual a k, provando-se assim o item 3 do Teorema 1.1.

Caso 2: A matriz A tem valores próprios distintos

Começamos por observar que se $\mathbb{C}^n$ se escreve como a soma direta de dois espaços complementares, em que um deles é um subespaço invariante por uma dada matriz quadrada B, a matriz B é semelhante a uma matriz triangular por blocos. Se ambos os subespaços são invariantes por B, a matriz B é semelhante a uma matriz diagonal por blocos.

Como observámos na Nota 2 (p. 7) se k é o índice de B, os subespaços $N(B^k)$ e $EC(B^k)$ são subespaços complementares. É fácil verificar que ambos os subespaços são invariantes por B (i.e. $\mathbf{x} \in N(B^k) \implies B\mathbf{x} \in N(B^k)$ e $\mathbf{x} \in EC(B^k) \implies B\mathbf{x} \in EC(B^k)$). Assim, mostra-se a decomposição seguinte conhecida por decomposição "core-nilpotent".

Se B é uma matriz $n \times n$ de índice k tal que $\operatorname{car}(B^k) = r$, existe uma matriz invertível Q, tal que

$$Q^{-1}BQ = \begin{bmatrix} N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_{r\times r} \end{bmatrix},$$

onde N é nilpotente de índice k (i.e. N^k é a matriz nula e $N^{k-1} \neq \mathbf{0}$) e C é invertível.

A matriz Q acima tem nas primeiras r colunas uma base de $EC(B^k)$ e nas últimas $n-r$ colunas uma base de $N(B^k)$.

Considere-se agora que o espectro de A é $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ com $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$. Suponha-se que o índice de λ_1 é igual a k_1 (i.e. a matriz $(A - \lambda_1 I)$ tem índice k_1). Pela decomposição acima, existe uma matrix invertível X_1 tal que

$$X_1^{-1}(A - \lambda_1 I)X_1 = \begin{bmatrix} L_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_1 \end{bmatrix}, \tag{1.11}$$

onde L_1 é nilpotente de índice k_1 e C_1 é invertível.

Como L_1 é nilpotente, o único valor próprio de L_1 é zero. Portanto, podemos aplicar a L_1 o teorema de Jordan já provado no caso de matrizes com um único valor próprio (Caso 1). Ou seja, existe uma matriz invertível Y_1 tal que

$$Y_1^{-1}L_1Y_1 = N(\lambda_1),$$

onde $N(\lambda_1)$ é a forma de Jordan de L_1 em que os blocos de Jordan têm na diagonal principal zeros.

Considerando a matriz (invertível) $Q_1 = X_1 \begin{bmatrix} Y_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix}$, temos

$$Q_1^{-1} A Q_1 = \begin{bmatrix} N(\lambda_1) + \lambda_1 I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C_1 + \lambda_1 I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J(\lambda_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix},$$

com $J(\lambda_1)$ como no Teorema 1.1.

O espectro de $(A - \lambda_1 I)$ é $\sigma(A - \lambda_1 I) = \{0, (\lambda_2 - \lambda_1), \ldots, (\lambda_s - \lambda_1)\}$. Como o espectro de L_1 é zero, a matriz C_1 em (1.11) tem espectro $\sigma(C_1) = \{(\lambda_2 - \lambda_1), \ldots, (\lambda_s - \lambda_1)\}$. Logo,

$$\sigma(C_1 + \lambda_1 I) = \sigma(A_1) = \{\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_s\}.$$

Repetindo o procedimento anterior agora para a matriz $(A_1 - \lambda_2 I)$, isto é considerando a decomposição de A_1 em partes nilpotente e não singular, e aplicando de novo o teorema de Jordan à parte nilpotente, conclui-se que existe uma matriz invertível Q_2 tal que

$$Q_2^{-1} A_1 Q_2 = \begin{bmatrix} J(\lambda_2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{bmatrix},$$

com $J(\lambda_2)$ a forma de Jordan indicada no Teorema 1.1 e $\sigma(A_2) = \{\lambda_3, \ldots, \lambda_s\}$.

Repetindo o processo até esgotar todos os valores próprios, conclui-se que existe uma matriz invertível P tal que

$$P^{-1} A P = J = \operatorname{diag}(J(\lambda_1), J(\lambda_2), \ldots, J(\lambda_s))$$

onde $J(\lambda_i)$ é constituído por blocos de Jordan do tipo indicado no Teorema 1.1.

Finalmente, podemos completar o Teorema 1.1 com a construção da matriz P, tal como se descreve a seguir.

Teorema 1.2. Seja A uma matriz nas condições do Teorema 1.1.

- Para cada valor próprio $\lambda_j \in \sigma(A)$ existe uma base $\mathcal{B}_j = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{t_j}\}$ do núcleo de $(A - \lambda_j I)$ e cadeias de Jordan construídas sobre cada vetor $\mathbf{b}_i$ desta base.

- A matriz P é construída por submatrizes, $P = [P_1 | \ldots | P_s]$, onde cada submatriz P_j tem nas colunas os vetores de todas as cadeias de Jordan construídas sobre os vetores da base $\mathcal{B}_j$ de $N(A - \lambda_j I)$, ordenados de tal forma que o primeiro vetor em cada cadeia é um vetor próprio e os restantes vetores são vetores próprios generalizados (de ordem crescente).

- A matriz P é não singular e tal que $P^{-1} A P = \operatorname{diag}(J(\lambda_1), J(\lambda_2), \ldots, J(\lambda_s))$.

Bibliografia

[1] Esmeralda Sousa Dias [2012], Álgebra Linear,

[2] Carl D. Meyer [2000], Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, SIAM.