

Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 10 - 7 a 11 de Maio de 2007

1. Mostre que existe uma solução de classe C^1 para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 6t\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

diferente da solução $y(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Explique porque é que isto não contradiz o teorema de Picard.

2. Mostre que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y^{1/2} \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

tem infinitas soluções, e explique porque esse facto não contradiz o Teorema de Picard.

3. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} (1-t)y \frac{dy}{dt} = 1 - y^2 \\ y(1/2) = 2, \end{cases}$$

- (i) Determine uma solução do PVI, e justifique que essa é a única solução do problema definida para t numa vizinhança de $1/2$.
- (ii) Mostre que o PVI admite um número infinito de soluções definidas em \mathbb{R} .
- (iii) Diga, justificando, porque não há contradição ao Teorema de Picard.
4. Mostre que o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{3y^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}} \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

tem uma única solução $y(t)$, definida para $t \in [0, +\infty[$, e calcule $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$.

Sugestão: Não tente resolver a equação diferencial. Considere a função $u(t)$ definida por

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{1}{3u^2} \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Uma vez determinada a função $u(t)$, mostre que

$$\frac{dy}{dt} \geq \frac{1}{3(u(t))^2 + \sqrt[3]{(t+1)^2}},$$

e integre esta relação entre 0 e t .

5. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Determine $e^{t\mathbf{A}}$ e resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

6. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

7. Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolva o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

8. Determine a solução geral do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x' = 14x - 10y + 1 \\ y' = 10x - 2y + 2 \end{cases}$$

Sugestão: Determine primeiro uma solução particular constante.