



Análise Matemática IV

1º Semestre 2006/2007

2º Teste

Cursos: LEEC e LEIC

16 de Dezembro de 2006, 13h

Duração do Teste: 1h30m

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

(2 val.) 1. Considere a seguinte equação diferencial

$$y \cos t + (2y + \sin t) \frac{dy}{dt} = 0 \quad (1)$$

Determine a solução da equação que verifica $y(\pi) = 1$ e justifique que essa é a única solução.

Resolução:

Dado que a equação não é linear nem separável, considere-se

$$M(t, y) = y \cos t \quad \text{e} \quad N(t, y) = 2y + \sin t$$

As funções M e N são continuamente diferenciáveis em \mathbb{R}^2 e verificam:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

pelo que se trata de uma equação exacta. Em consequência, existe $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável tal que a equação (1) é equivalente a:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0 \quad (2)$$

Assim, y é solução da equação (1) se e só se $\Phi(t, y) = c$, para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Dito de outra forma, $\Phi(t, y) = c$ define implicitamente a solução geral da equação diferencial (1), com Φ verificando $\nabla \Phi = (M, N)$. Assim:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = y \cos t \quad \Rightarrow \quad \Phi(t, y) = \int y \cos t \, dt = y \sin t + c(y)$$

Por outro lado

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2y + \sin t \quad \Rightarrow \quad c(y) = y^2 + C$$

o que implica

$$\Phi(t, y) = y \sin t + y^2 + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

e a solução geral da equação é dada (implicitamente) por:

$$y \sin t + y^2 = k \quad , \quad k \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Dado que $y(\pi) = 1$, resulta que (3) é solução do PVI se e só se $k = 1$. Por outro lado, $\frac{\partial N}{\partial y}(\pi, 0) = N(\pi, 1) = 2 \neq 0$, pelo que o teorema da função implícita garante a existência de uma única função que verifica $y \sin t + y^2 = 1$ numa vizinhança de $t_0 = \pi$. Pelo que vimos acima, podemos concluir que a solução do PVI é única numa vizinhança de t_0 .

(2 val.) 2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(a) Determine a matriz e^{At} .

(b) Resolva o problema de valor inicial

$$\dot{X} = AX + B(t) \quad , \quad X(0) = (1, 1, -1)$$

em que $B(t) = (0, 1, e^{-2t})$.

Resolução:

(a) Observe-se que a matriz A é diagonal por blocos, isto é

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad A_1 = [-2] \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

tendo-se então que

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & 0 \\ 0 & e^{A_2 t} \end{bmatrix}$$

Por um lado, é óbvio que $e^{A_1 t} = [e^{-2t}]$. Por outro lado, considerando

$$A_2 = -2I_2 + N = -2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e atendendo a que $I_2 N = N I_2$ e $N^p = 0$ para qualquer $p > 1$, temos que:

$$e^{tA_2} = e^{t(-2I_2 + N)} = e^{-2tI_2} e^{tN} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} (I_2 + Nt) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 3te^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & 3t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos então concluir que:

$$e^{At} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Pela fórmula da variação das constantes, a solução do problema de valor inicial será dada por

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{At} X(0) + e^{At} \int_0^t e^{-As} B(s) ds \\ &= e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \int_0^t e^{2s} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3s \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ e^{-2s} \end{bmatrix} ds \\ &= \frac{e^{-2t}}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ e^{2t} - 3t^2 - 6t - 2 \\ 2t - 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2 val.) 3. Considere o problema de valor inicial

$$y'' - 4y' = 2\delta(t - 1) \quad , \quad y(0) = -y'(0) = 1$$

em que $\delta(t - 1)$ é a distribuição delta de Dirac centrada em 1.

- (a) Determine a Transformada de Laplace da solução do problema..
- (b) Calcule a solução do problema.

Resolução:

(a) Aplicando a Transformada de Laplace a ambos os membros da equação, obtemos

$$\mathcal{L}\{y'' - 4y'\}(s) = \mathcal{L}\{2\delta(t - 1)\}(s)$$

Atendendo às propriedades da Transformada de Laplace (linearidade e Transformada de Laplace da derivada), às condições iniciais e ao facto de

$$\mathcal{L}\{2\delta(t - 1)\}(s) = 2e^{-s}$$

tem-se que

$$(s^2 - 4s)\mathcal{L}(y)(s) - s + 5 = 2e^{-s}$$

pelo que

$$\mathcal{L}(y)(s) = \frac{2e^{-s}}{s(s-4)} + \frac{s-5}{s(s-4)}$$

(b) Para determinar a solução do problema de valor inicial, iremos determinar a função cuja Transformada de Laplace é dada pela função que determinámos na alínea (a). Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{s-5}{s(s-4)} &= \frac{1}{4} \left(\frac{5}{s} - \frac{1}{s-4} \right) \\ &= \frac{1}{4} (5\mathcal{L}\{1\}(s) - \mathcal{L}\{e^{4t}\}(s)) \\ &= \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{4}(5 - e^{4t}) \right\}(s) \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \frac{2e^{-s}}{s(s-4)} &= \frac{e^{-s}}{2} \left(-\frac{1}{s} + \frac{1}{s-4} \right) \\ &= \frac{e^{-s}}{2} (-\mathcal{L}\{1\}(s) + \mathcal{L}\{e^{4t}\}(s)) \\ &= \frac{e^{-s}}{2} \mathcal{L}\{-1 + e^{4t}\}(s) \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}\left\{ H(t-1) (-1 + e^{4(t-1)}) \right\}(s) \end{aligned}$$

Temos então que a solução do problema de valor inicial é dada por:

$$y(t) = \frac{1}{4}(5 - e^{4t}) + \frac{1}{2}H(t-1) (-1 + e^{4(t-1)})$$

- (2 val.) 4. Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine a solução do seguinte problema de valores na fronteira e iniciais

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - (\text{sen } t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \quad t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, \frac{\pi}{2}) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = -\text{sen}(2x) + 10\text{sen}(6x), & x \in]0, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

Resolução:

Considerando $u(x, t) = X(x)T(t)$ e substituindo na equação diferencial, obtemos

$$X(x)T'(t) - \text{sen } t X''(x)T(t) = 0$$

pelo que

$$\frac{T'(t)}{\text{sen } t T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Atendendo a que o primeiro membro é uma função de t , e o segundo membro é uma função de x , para que a igualdade se verifique para todos os valores de t e x , ambos os membros têm que igualar uma constante, Assim

$$\frac{T'(t)}{\text{sen } t T(t)} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Quanto às condições de fronteira, dado que

$$u(0, t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X(0)T(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X(0) = 0$$

e

$$u(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X(\frac{\pi}{2})T(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X(\frac{\pi}{2}) = 0$$

visto $T(t)$ não poder ser a função nula. Começemos por determinar as soluções não nulas do problema

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \quad l$$

O polinómio característico da equação é $P(R) = R^2 - \lambda$, com raízes $\pm\sqrt{\lambda}$. Temos assim 3 possibilidades:

- Se $\lambda = 0$, a raiz é 0 com multiplicidade 2, pelo que a solução geral da equação diferencial é dada por $X(x) = A + Bx$. Pelas condições de fronteira conclui-se que a única solução do problema com $\lambda = 0$ é a solução nula.
- Se $\lambda > 0$ as raízes são $\pm\mu \in \mathbb{R}$ (onde considerámos $\lambda = \mu^2$), pelo que a solução geral da equação diferencial é dada por $X(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$. Pelas condições de fronteira conclui-se que a única solução do problema com $\lambda > 0$ é a solução nula.
- Se $\lambda < 0$ as raízes são $\pm i\mu$ (onde considerámos $\lambda = -\mu^2$, pelo que a solução geral da equação diferencial é dada por $X(x) = A\text{sen}(\mu x) + B\text{cos}(\mu x)$. Pelas condições de fronteira conclui-se que $B = 0$ e $\mu = 2n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\lambda = -4n^2$, a que corresponde $X(x) = \text{sen}(2nx)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Para $\lambda = -4n^2$, uma solução da equação

$$T' = -4n^2 \text{sen } t T$$

é dada por

$$T(t) = e^{4n^2 \cos t}$$

Temos então, que para cada $n \in \mathbb{N}$, as funções

$$u_n(x, t) = e^{4n^2 \cos t} \text{sen}(2nx)$$

são soluções da equação diferencial parcial e verificam as condições de fronteira. Por linearidade, quaisquer combinações lineares (finitas) também verificarão a equação e as condições de fronteira. Assim

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{4n^2 \cos t} \text{sen}(2nx)$$

é (formalmente) solução do problema de valores de fronteira. Atendendo à condição inicial,

$$-\text{sen}(2x) + 10\text{sen}(6x) = u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{4n^2} \text{sen}(2nx),$$

resulta que:

$$A_1 = -e^{-4}; \quad A_3 = 10e^{-36}; \quad A_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 3\}.$$

Assim, a solução do problema é:

$$u(x, t) = -e^{4(\cos t - 1)} \text{sen}(2nx) + 10e^{36(\cos t - 1)} \text{sen}(6nx).$$

(2 val.) 5. Considere função $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \cos(\omega x) \quad , \quad \omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

Determine a série de Fourier de f em $[-\pi, \pi]$ e aproveite o resultado para mostrar que

$$\frac{1}{\omega} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\omega}{\omega^2 - n^2} = \pi \cotg(\pi\omega)$$

Resolução:

Atendendo a que f é contínua em $[-\pi, \pi]$ e $f(-\pi) = f(\pi)$ tem-se, pelo Teorema da convergência pontual das séries de Fourier,

$$\cos(\omega x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad \forall x \in [-\pi, \pi], \quad (4)$$

onde os coeficientes da série anterior são dados por:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\omega x) dx = \frac{2}{\omega\pi} \text{sen}(\omega\pi)$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(\omega x) \cos(nx) dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} (\cos(\omega x + nx) + \cos(\omega x - nx)) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\text{sen}(\omega\pi + n\pi)}{\omega + n} + \frac{\text{sen}(\omega\pi - n\pi)}{\omega - n} \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\text{sen}(\omega\pi) \cos(n\pi)}{\omega + n} + \frac{\text{sen}(\omega\pi) \cos(n\pi)}{\omega - n} \right) \\
&= \frac{\text{sen}(\omega\pi) \cos n\pi}{\pi} \left(\frac{1}{\omega + n} + \frac{1}{\omega - n} \right) \\
&= \frac{\text{sen}(\omega\pi) (-1)^n}{\pi} \frac{2\omega}{\omega^2 - n^2}
\end{aligned}$$

Substituindo os coeficientes da série na equação (4), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\cos(\omega x) &= \frac{\text{sen}(\omega\pi)}{\omega\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\omega\pi)}{\pi} \frac{2\omega (-1)^n}{\omega^2 - n^2} \cos(nx) \\
&= \frac{\text{sen}(\omega\pi)}{\omega\pi} \left(\frac{1}{\omega} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\omega (-1)^n}{\omega^2 - n^2} \cos(nx) \right).
\end{aligned}$$

Fazendo $x = \pi$ na igualdade anterior, obtém-se

$$\cos(\omega\pi) = \frac{\text{sen}(\omega\pi)}{\omega\pi} \left(\frac{1}{\omega} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\omega (-1)^n}{\omega^2 - n^2} \cos(n\pi) \right),$$

Atendendo a que $(-1)^n \cos(n\pi) = (-1)^{2n} = 1$, resulta então que:

$$\pi \cotg(\pi\omega) = \frac{1}{\omega} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\omega}{\omega^2 - n^2}$$