

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

2º Teste / Recuperação

(LEAM, LEAN, LEBL, LEC, LEEC, LEGM, LEM, LEMAT, LEQ, LQ)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 18/06/2007, 13h00

Duração: 1h30.

- (1,5 val.) 1) Considere o seguinte problema de valor inicial

$$y^2 - xy(1 - x^2y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad , \quad y(1) = -1$$

Verifique que a equação admite um factor de integração da forma $\mu(x)$, determine-o e resolva o problema, apresentando uma **expressão explícita** para a solução.

- (2 val.) 2) Resolva o problema de valor inicial

$$y'' + 4y' + 4y = 4e^{-2t} \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = -1$$

- (2,5 val.) 3) Para $t \in \mathbb{R}$, considere a matriz

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- (a) Determine a solução geral da equação $X' = A(t)X$.
(b) Indique uma matriz solução fundamental para a equação.
(c) **Utilizando a matriz da alínea anterior** resolva o problema de valor inicial

$$X' = A(t)X + B(t) \quad , \quad X(0) = [1 \ 0 \ 1]^T \quad \text{e} \quad B(t) = (1, e^{2t}, 0)$$

- (2,5 val.) 4) (a) Calcule a série de Fourier de senos da função $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \pi - x$$

- (b) Utilizando o método de separação de variáveis, determine uma solução da equação

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

que satisfaz as condições de fronteira $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, e as condições iniciais

$$u(x, 0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \pi - x \quad , \quad x \in [0, \pi]$$

- (1,5 val.) 5) Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt[3]{ty^2} \quad , \quad y(-1) = 1$$

- (a) Resolva o problema e indique o intervalo máximo de existência de solução.
(b) Indique, justificando, qual o ponto $t_1 \in \mathbb{R}$ onde deixa de garantir unicidade de solução, e determine outra solução distinta do mesmo problema de valor inicial.