

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

2º Teste

(LEAM, LEAN, LEBL, LEC, LEEC, LEGM, LEM, LEMAT, LEQ, LQ)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 09/06/2007, 11h00

Duração: 1h30.

(1,5 val.) 1) Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{2x}{y} - 4 - \left(\frac{4x}{y} + 2\right) \frac{dy}{dx} = 0, \quad y(1) = -5.$$

Verifique que a equação admite um factor de integração da forma $\mu(y)$, determine-o e resolva o problema, obtendo uma **expressão explícita** para a solução.

Resolução:

A equação admite um factor integrante da forma $\mu(y)$ se

$$\mu(y) \left(\frac{2x}{y} - 4\right) - \mu(y) \left(\frac{4x}{y} + 2\right) \frac{dy}{dx} = 0$$

for uma equação exacta, isto é, se

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu(y) \left(\frac{2x}{y} - 4\right)\right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(y) \left(\frac{4x}{y} + 2\right)\right) \Leftrightarrow \mu'(y) \left(\frac{2x}{y} - 4\right) - \mu(y) \frac{2x}{y^2} = -\mu(y) \frac{4}{y}$$

pelo que

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow \mu(y) = y.$$

Confirma-se a existência do factor integrante $\mu(y)$. Sendo

$$2x - 4y - (4x + 2y) \frac{dy}{dx} = 0$$

uma equação exacta, existe $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\nabla \Phi = (2x - 4y, -4x - 2y)$ e as curvas de nível de $\Phi(x, y)$ definem implicitamente a solução geral da equação diferencial. Para calcular Φ , tem-se por um lado

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x - 4y \Leftrightarrow \Phi = x^2 - 4xy + C(y)$$

e por outro lado

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -4x - 2y \Leftrightarrow -4x + C'(y) = -4x - 2y \Leftrightarrow C(y) = -y^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

pelo que $\Phi(x, y) = x^2 - 4xy - y^2 + C$, e a solução geral da equação é definida por

$$x^2 - 4xy - y^2 = K, \quad K \in \mathbb{R}$$

Pela condição inicial, $y(1) = -5$, conclui-se que $K = -4$, pelo que

$$x^2 - 4xy - y^2 = -4$$

define implicitamente a solução do PVI. Resolvendo em ordem a y , obtemos a expressão explícita pedida

$$y(x) = -2x - \sqrt{5x^2 + 4}.$$

(2,5 val.) 2) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Determine e^{At} .
(b) Resolva o problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \quad , \quad \mathbf{x}(0) = (1, -1)^T \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(t) = (0, e^{2t})^T$$

Resolução:

- (a) Começamos por determinar os valores próprios da matriz A . Eles são os zeros do polinómio característico, dados por $\det(A - \lambda I) = 0$, donde:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\Leftrightarrow (3 - \lambda)(1 - \lambda) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Conclui-se portanto que A tem um único valor próprio, $\lambda = 2$, com multiplicidade algébrica 2. Determinamos agora os vectores próprios associados a este valor próprio:

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow (A - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde naturalmente se obtêm duas equações dependentes e uma única relação $v_1 = 2v_2$, concluindo-se portanto que os vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 2$ são todos os vectores (não nulos) da forma

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Como o número de vectores próprios linearmente independentes desta família é apenas um, conclui-se que a multiplicidade geométrica do valor próprio $\lambda = 2$ (a dimensão do seu espaço próprio) é um, sendo portanto inferior à sua multiplicidade algébrica. A matriz A não é por isso diagonalizável e a sua forma canónica de Jordan é

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

obtida de A através da mudança de base $A = SJS^{-1}$. A matriz de mudança de base

$$S = \begin{bmatrix} 2 & w_1 \\ 1 & w_2 \end{bmatrix}$$

tem na primeira coluna um dos vectores próprios já determinados, associado ao único valor próprio, e na segunda coluna um vector próprio generalizado \mathbf{w} a ser obtido pela resolução do sistema

$$(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De novo se obtêm duas equações dependentes e uma única relação $w_1 = 2 + 2w_2$, donde se pode escolher $w_2 = 0$ e $w_1 = 2$ e então

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, sabemos que $e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$, com e^{Jt} dada por

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix},$$

pelo que

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} & -2te^{2t} \\ \frac{te^{2t}}{2} & (1-t)e^{2t} \end{bmatrix}.$$

- (b) Este problema de valor inicial, não homogêneo, resolve-se com recurso à fórmula da variação das constantes, para sistemas de coeficientes constantes:

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-As} \mathbf{b}(s) ds.$$

De acordo com o enunciado $t_0 = 0$ e, para além da exponencial matricial já calculada na alínea anterior, tudo o resto é dado. Tudo se resume, portanto, à substituição na fórmula anterior e ao cálculo explícito da solução. Começamos pela integração:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-As} \mathbf{b}(s) ds &= \int_0^t \begin{bmatrix} (1-s)e^{-2s} & 2se^{-2s} \\ -\frac{se^{-2s}}{2} & (1+s)e^{-2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2s} \end{bmatrix} ds \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} 2s \\ 1+s \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} t^2 \\ t + \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A segunda parcela da soma, na fórmula da variação das constantes (correspondente à solução particular do sistema não homogêneo), fica assim:

$$\begin{aligned} e^{At} \int_0^t e^{-As} \mathbf{b}(s) ds &= \begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} & -2te^{2t} \\ \frac{te^{2t}}{2} & (1-t)e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2 \\ t + \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -t^2e^{2t} \\ (t - \frac{t^2}{2})e^{2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A primeira parcela da soma, correspondente à solução homogênea, é

$$e^{At}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} & -2te^{2t} \\ \frac{te^{2t}}{2} & (1-t)e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+3t)e^{2t} \\ (-1 + \frac{3t}{2})e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Somando as duas parcelas obtemos a solução final:

$$\mathbf{x}(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 + 3t - t^2 \\ -1 + \frac{5t}{2} - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}.$$

(2 val.) 3) Considere a seguinte equação linear de 3ª ordem

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = h(t). \quad (1)$$

- (a) Determine a solução geral da equação homogénea associada.
(Sugestão: e^t é uma solução).
- (b) Determine a solução do problema de valor inicial dado por (1) com $h(t) = 10e^t$ e verificando $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Resolução:

- (a) Em termos do operador de derivação $D = \frac{d}{dt}$, a equação de terceira ordem homogénea, correspondente à que é dada, pode ser escrita como

$$(D^3 - D^2 + 4D - 4)y = 0.$$

A sugestão, de que e^t é uma das soluções da equação homogénea, significa que $\lambda = 1$ é uma das três raízes do correspondente polinómio característico $\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4$, pelo que dividindo-o por $\lambda - 1$, se pode então obter a factorização

$$(D - 1)(D^2 + 4)y = 0.$$

Conclui-se finalmente que as três raízes do polinómio característico são então $\lambda = 1$, dada na sugestão, e $\lambda = \pm 2i$. Sabendo que o conjunto das soluções da equação homogénea é um espaço vectorial de dimensão três, podemos obtê-lo com recurso a uma base de três soluções linearmente independentes, associadas às três raízes. São elas e^t , $\cos(2t)$ e $\sin(2t)$, estas duas últimas sendo as partes real e imaginária das correspondentes exponenciais complexas associadas às duas raízes imaginárias puras, conjugadas. Por combinação linear arbitrária obtém-se assim a solução geral (real) da correspondente equação homogénea:

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 \cos(2t) + c_3 \sin(2t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

- (b) Sabemos que a solução geral da equação não homogénea é dada somando a uma solução particular todas as soluções da homogénea correspondente:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t),$$

sendo que a parte homogénea já foi obtida na alínea anterior. Quanto a uma solução particular, vamos determiná-la pelo método dos polinómios aniquiladores e dos coeficientes indeterminados, visto o termo não homogéneo $10e^t$ ser solução da equação $(D-1)y = 0$. Pelo que aplicando o operador $(D-1)$ aos dois lados da equação não homogénea dada, aniquilamos o termo não homogéneo e transformamo-la numa nova equação homogénea com um conjunto maior de soluções:

$$(D - 1)^2(D^2 + 4)y = 0.$$

As soluções desta nova equação homogénea são da forma

$$c_1 e^t + c_2 \cos(2t) + c_3 \sin(2t) + \alpha t e^t.$$

sendo que a última função nesta combinação linear, te^t , resulta da multiplicidade algébrica igual a dois da raiz $\lambda = 1$. As três primeiras parcelas correspondem à solução geral da equação homogênea original, pelo que é o coeficiente α deste novo termo que é necessário determinar especificamente para se obter a solução particular do problema não homogêneo dado.

Assim, fazemos $y_p(t) = \alpha te^t$ e temos

$$\begin{aligned} y_p''' - y_p'' + 4y_p' - 4y_p &= 10e^t \Leftrightarrow \\ \alpha(3+t)e^t - \alpha(2+t)e^t + 4\alpha(1+t)e^t - 4\alpha te^t &= 10e^t \Leftrightarrow \\ 3\alpha - 2\alpha + 4\alpha &= 10, \end{aligned}$$

donde finalmente se obtém $\alpha = 2$.

A solução do geral do problema não homogêneo é então dada por

$$y(t) = y_h(t) + 2te^t = c_1e^t + c_2\cos(2t) + c_3\sin(2t) + 2te^t,$$

com constantes reais c_1, c_2, c_3 , que agora determinamos de modo a satisfazer as condições iniciais especificadas. Assim

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &\Leftrightarrow c_1 + c_2 = 0 \\ y'(0) = 0 &\Leftrightarrow c_1 + 2c_3 + 2 = 0 \\ y''(0) = 0 &\Leftrightarrow c_1 - 4c_2 + 4 = 0. \end{aligned}$$

Resolvendo este sistema algébrico simples de três equações e três incógnitas, chega-se a $c_1 = -4/5$, $c_2 = 4/5$ e $c_3 = -3/5$, pelo que a (única) solução do pvi é

$$y(t) = -\frac{4}{5}e^t + \frac{4}{5}\cos(2t) - \frac{3}{5}\sin(2t) + 2te^t.$$

- (2,5 val.) 4) (a) Determine a série de Fourier de senos da função $f(x) = 2x + 1$, para $x \in [0, 2]$.
 (b) Utilizando o método de separação de variáveis, determine uma solução da equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = (1+t) \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x \in]0, 2[\quad , \quad t > 0$$

que satisfaz as condições de fronteira $u(0, t) = u(2, t) = 0$, para $t > 0$, e a condição inicial

$$u(x, 0) = 2x + 1 \quad , \quad x \in [0, 2].$$

Resolução:

- (a) A série de senos de f em $[0, 2]$, é da forma

$$S_{\text{sen}} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{2}$$

obtida por prolongamento ímpar de f para o intervalo $[-2, 0]$, pelo que se têm as fórmulas dos coeficientes

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2} \int_0^2 (2x+1) \text{sen} \frac{n\pi x}{2} \\ &= -\frac{2}{n\pi} (2x+1) \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 + \frac{4}{n\pi} \int_0^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - 5(-1)^n) \end{aligned}$$

Então

$$S_{\text{sen}} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (1 - 5(-1)^n) \text{sen} \frac{n\pi x}{2} = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 2x + 1 & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

- (b) Por separação de variáveis, vamos procurar soluções não nulas da equação diferencial parcial e condições de fronteira, da forma $u(t, x) = T(t)X(x)$. Substituindo na equação

$$X''T - XT = (t+1)XT' \Leftrightarrow \frac{X''}{X} = (1+t)\frac{T'}{T} + 1.$$

Para que a igualdade seja válida para todos $x \in]0, 2[$ e $t > 0$,

$$\frac{X''}{X} = \lambda \quad \text{e} \quad (1+t)\frac{T'}{T} + 1 = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Por outro lado, as condições de fronteira implicam

$$u(t, 0) = 0 \Rightarrow T(t)X(0) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

e

$$u(t, 2) = 0 \Rightarrow T(t)X(2) = 0 \Rightarrow X(2) = 0$$

visto $T(t)$ não poder ser a função nula. Começemos por determinar as soluções não nulas de

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = X(2) = 0.$$

As raízes do polinómio característico são $\pm\sqrt{\lambda}$, pelo que podem ocorrer três casos distintos:

- Se $\lambda = 0$, $X(x) = ax + b$ e as condições de fronteira implicam $a = b = 0$, pelo que a solução é $X(x) \equiv 0$.
- Se $\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2$, $X(x) = ae^{\mu x} + be^{-\mu x}$ e as condições de fronteira implicam $a = b = 0$, pelo que a solução é $X(x) \equiv 0$.
- Se $\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$, $X(x) = a \text{sen}(\mu x) + b \text{cos}(\mu x)$. Por um lado $X(0) = 0$ implica $b = 0$ e $X(x) = a \text{sen}(\mu x)$. Por outro lado $X(2) = 0$ implica $a \text{sen}(2\mu) = 0$ e para que a solução não seja nula teremos $\mu = n\pi/2$ e $X(x) = \text{sen}(\frac{n\pi x}{2})$, $n \in \mathbb{N}$.

Para cada n podemos obter a função T pela equação separável

$$\frac{T'}{T} = \frac{-4 - n^2\pi^2}{4(t+1)} \Leftrightarrow \log T = \frac{-4 - n^2\pi^2}{4} \log(t+1) + C \Leftrightarrow T(t) = k(t+1)^{\frac{-4 - n^2\pi^2}{4}}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, a função

$$u_n(t, x) = \alpha_n (t+1)^{\frac{-4 - n^2\pi^2}{4}} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

é solução da EDP e das condições de fronteira, pelo que também a função

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (t+1)^{\frac{-4 - n^2\pi^2}{4}} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

o será. Finalmente, pela condição inicial

$$u(0, x) = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad 2x + 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

pelo que, utilizando a alínea (a), se conclui que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha_n = \frac{2}{n\pi}(1 - 5(-1)^n)$$

e como tal

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(1 - 5(-1)^n)(t + 1)^{-\frac{4-n^2\pi^2}{4}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

é a solução pedida.

(1,5 val.) 5) Considere o problema de valor inicial

$$\frac{1}{t} \frac{dy}{dt} = 2y^2 \quad , \quad y(0) = 1$$

(a) Resolva o problema e indique o intervalo máximo de existência de solução.

(b) Mostre que a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2t \log(t + e) y^2 + e^{\operatorname{sen}(ty)} \quad , \quad y(0) = 1$$

existe, é única e existe um $0 < T \leq 1$ tal que $\lim_{t \rightarrow T^-} y(t) = +\infty$.

Resolução:

(a) A equação diferencial é separável pelo que temos:

$$\int \frac{dy}{2y^2} = \int t \, dt \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2y} = \frac{t^2}{2} + C.$$

Impondo a condição inicial, obtemos, com $y = 1$ e $t = 0$,

$$-\frac{1}{2} = \frac{0}{2} + C \quad \Leftrightarrow \quad C = -\frac{1}{2},$$

pelo que a solução é dada por

$$-\frac{1}{2y} = \frac{t^2 - 1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \frac{1}{1 - t^2}.$$

Assim, o intervalo máximo de existência desta solução é $t \in] - 1, 1[$.

(b) Seja $f(t, y) = 2t \log(t + e) y^2 + e^{\operatorname{sen}(ty)}$. Como $f(t, y)$ é de classe C^∞ na região $(t, y) \in] - e, +\infty[\times \mathbb{R}$, o teorema de Picard garante que existe uma única solução local do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 2t \log(t + e) y^2 + e^{\operatorname{sen}(ty)} = f(t, y) \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Assim, esta solução $u(t)$ (a qual não nos interessa explicitar) está definida num intervalo da forma $]a, b[$, com $a < 0 < b$. Pelo teorema de prolongamento de soluções a intervalos máximos, seja T o valor máximo que b pode tomar por prolongamento da solução $u(t)$. Pretendemos mostrar que $0 < T \leq 1$ e que $\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = +\infty$.

Pela alínea anterior, a função $\frac{1}{1-t^2}$ é a solução do PVI $\frac{dy}{dt} = 2ty^2$, $y(0) = 1$. Por outro lado, para qualquer $t \geq 0$ e qualquer y real, temos as seguintes desigualdades

$$2ty^2 \leq 2t \log(t+e) y^2 \leq 2t \log(t+e) y^2 + e^{\text{sen}(ty)} = f(t, y).$$

Assim, a solução $u(t)$ do PVI (2) verifica

$$\frac{1}{1-t^2} \leq u(t).$$

Como $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-t^2} = +\infty$, isto implica que $T \in]0, 1]$ e que $\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = +\infty$.