

## Análise Matemática IV

### 2º Semestre 2004/2005

2º Teste

**Cursos:** LCI, LEAmb, LEBL,LEBiom, LEGM, LEIC, LEM, LEMat, LEMG, LEQ, LQ  
17 de Dezembro de 2005,

**Duração do Teste: 1h30m**

**Justifique cuidadosamente todas as respostas.**

( 2 val.) 1. Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$2xy + (4x^2 - y^2) \frac{dy}{dx} = 0, \quad y(0) = 1,$$

indicando o intervalo máximo de existência de solução.

**Sugestão:** Mostre que a equação admite um factor integrante da forma  $\mu(y)$ .

**Resolução:**

Sendo  $M(x, y) = 2xy$  e  $N(x, y) = 4x^2 - y^2$ , tem-se que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = 2y$$

pelo que a equação não é exacta. Seguindo a sugestão, vamos admitir que a equação admite um factor integrante da forma  $\mu(y)$ . Sendo assim, a equação

$$\mu(y)2xy + \mu(y)(4x^2 - y^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta, o que implica

$$\frac{\partial}{\partial y} (\mu(y)2xy) = \frac{\partial}{\partial x} (\mu(y)(4x^2 - y^2))$$

ou seja,  $\mu$  verifica a equação diferencial

$$\mu'(y) = \frac{3}{y}\mu(y)$$

Confirma-se então que existe um factor integrante da forma  $\mu(y)$ , e resolvendo a equação, conclui-se que  $\mu(y) = y^3$ . Consequentemente, a equação

$$2xy^4 + (4x^2y^3 - y^5) \frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta, pelo que existe  $\Phi(x, y)$ , tal que  $\nabla\Phi = (2xy^4, 4x^2y^3 - y^5)$  e  $\Phi(x, y) = C$  define implicitamente a solução da equação diferencial. Para determinar  $\Phi$ ,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2xy^4 \Rightarrow \Phi(x, y) = x^2y^4 + C(y)$$

e

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 4x^2y^3 - y^5 \Rightarrow 4x^2y^3 + C'(y) = 4x^2y^3 - y^5 \Rightarrow C(y) = -\frac{y^6}{6} + c$$

pelo que

$$\Phi(x, y) = x^2y^4 - \frac{y^6}{6} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

A solução geral da equação é definida implicitamente por

$$x^2y^4 - \frac{y^6}{6} + C = 0, \quad C \in \mathbb{R}$$

Pela condição inicial  $y(0) = 1$ , conclui-se que  $C = -1/6$ , e como tal a solução do PVI é definida por

$$6x^2y^4 - y^6 = -1 \quad (1)$$

É de notar, que atendendo a que  $N(0, 1) = -1 \neq 0$ , o teorema da função implícita garante a existência de uma única solução do PVI,  $y(x)$  definida para  $x$  numa vizinhança de  $x_0 = 0$ . Essa solução poderá ser prolongada sempre que se verificar  $y^3N(x, y) \neq 0$ . Assim, o intervalo máximo de solução,  $I_{max}$ , será o maior intervalo tal que

- $x_0 = 0 \in I_{max}$ ;
- $y(x) \neq 0$  para todo  $x \in I_{max}$ ;
- $y(x) \neq \pm 2x$  para todo  $x \in I_{max}$ .

Por um lado, fazendo  $y = 0$  em (1), obtém-se uma equação impossível, pelo que  $y(x) \neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Por outro lado, fazendo  $y = \pm 2x$  e substituindo na equação (1) obtém-se

$$96x^6 - 64x^6 = -1$$

que é também impossível em  $\mathbb{R}$ . Sendo assim  $I_{max} = \mathbb{R}$ .

(2 val.) 2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule a matriz  $e^{At}$  e determine a solução do problema de valor inicial

$$X' = AX + B(t), \quad X(0) = (1, 1).$$

em que  $B(t) = (1, e^{2t})$ .

**Resolução:**

Note-se que  $A = 2I + N$ , em que  $I$  é a matriz identidade, e

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim

$$e^{At} = e^{2t} I \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Nt)^n}{n!} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, e utilizando a fórmula da variação das constantes:

$$X(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{At} \int_0^t e^{-As} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{2s} \end{bmatrix} ds = \frac{e^{2t}}{2} \begin{bmatrix} 3 - e^{-2t} - 2t - t^2 \\ 2 + 2t \end{bmatrix}$$

( 2 val.) 3. Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = \delta(t - 2), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

**Resolução:**

Aplicando transformada de Laplace a ambos os termos da equação, obtem-se

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - y\right)(s) = \mathcal{L}(\delta(t - 2))(s)$$

Pelas propriedades da transformada de Laplace, e condições iniciais,

$$-1 + (s^2 - 1)\mathcal{L}(y)(s) = e^{-2s} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}(y)(s) = \frac{1}{s^2 - 1} + e^{-2s} \frac{1}{s^2 - 1}$$

Dado que

$$\frac{1}{s^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s - 1} - \frac{1}{s + 1} \right) = \frac{1}{2} (\mathcal{L}(e^t)(s) - \mathcal{L}(e^{-t})(s)) = \mathcal{L} \left( \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}) \right) (s) = \mathcal{L}(\sinh t)(s)$$

tem-se que

$$e^{-2s} \frac{1}{s^2 - 1} = \mathcal{L}(H(t - 2)\sinh(t - 2))(s)$$

e como tal,

$$\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(\sinh t + H(t - 2)\sinh(t - 2))(s)$$

pelo que a solução do pvi é

$$y(t) = \sinh t + H(t - 2)\sinh(t - 2)$$

( 3 val.) 4. Considere o seguinte problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x}, & \text{para } x \in ]0, 3[, t > 0 \\ u(0, t) = u(3, t) = 0, & \text{para } t > 0, \\ u(x, 0) = e^{-x} f(x), & \text{para } x \in [0, 3]. \end{cases} \quad (2)$$

em que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \text{ ou } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

- (a) Determine a série de senos da função  $f$  no intervalo  $[0, 3]$  e indique para que valores converge a série.
- (b) Resolva o problema (2).

**Resolução:**

(a) A série de senos da função  $f$  é

$$SS(f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{3} \right)$$

em que

$$b_n = \frac{2}{3} \int_0^3 f(x) \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{3} \right) dx = \frac{2}{3} \int_1^2 \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{3} \right) dx = \frac{2}{n\pi} \left( \cos \left( \frac{n\pi}{3} \right) - \cos \left( \frac{2n\pi}{3} \right) \right)$$

Conclui-se que

$$SS(f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left( \cos \left( \frac{n\pi}{3} \right) - \cos \left( \frac{2n\pi}{3} \right) \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi x}{3} \right)$$

Pelo teorema da convergência pontual das séries de Fourier, tem-se que

$$SS(f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 2 \\ 0 & \text{se } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

(b) Pelo método de separação de variáveis, se  $u(x, t) = T(t)X(x)$ , obtém-se

$$XT' = X''T + X'T \Leftrightarrow \frac{T'}{T} = \frac{X'' + 2X'}{X}$$

e para que a igualdade seja válida, para todos  $t$  e  $x$  nos intervalos indicados,

$$\frac{T'}{T} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X'' + 2X'}{X} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Pelas condições de fronteira

$$u(0, t) = T(t)X(0) = 0 \Rightarrow X(0) = 0, \quad u(3, t) = T(t)X(3) = 0 \Rightarrow X(3) = 0$$

dado que a função  $T$  não pode ser a função nula. Começemos por resolver o problema

$$\begin{cases} X'' + 2X' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(3) = 0 \end{cases}$$

A equação pode ser escrita na forma  $(D^2 + 2D - \lambda)X = 0$ , pelo que as suas soluções dependem das raízes da equação

$$R^2 + 2R - \lambda = 0 \Leftrightarrow R = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\lambda}}{2} \Leftrightarrow R = -1 \pm \sqrt{1 + \lambda}$$

**Caso 1:**  $\lambda = -1$

Neste caso

$$X(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$$

e para que  $X(0) = X(3) = 0$  é necessário que  $A = B = 0$ , pelo que a única solução a verificar o problema é

$$X(x) = 0$$

para todo  $x$ .

**Caso 2:**  $\lambda > -1$

Neste caso, e fazendo  $1 + \lambda = \mu^2$ ,

$$X(x) = Ae^{(-1+\mu)x} + Be^{(-1-\mu)x}$$

e para que  $X(0) = X(3) = 0$  é necessário que  $A = B = 0$ , pelo que a única solução a verificar o problema é

$$X(x) = 0$$

para todo  $x$

**Caso 3:**  $\lambda < -1$

Neste caso, e fazendo  $1 + \lambda = -\mu^2$ ,

$$X(x) = e^{-x}(A\text{sen}(\mu x) + B\text{cos}(\mu x))$$

Para que  $X(0) = 0$  é necessário que  $B = 0$ . Por outro lado para que  $X(3) = 0$ , ou  $A = 0$  o que implicaria de novo  $X(x) = 0$ , ou  $\text{sen}(3\mu) = 0$  implicando  $\mu = \frac{n\pi}{3}$ . Tem-se então que para  $\lambda = -1 - \frac{n^2\pi^2}{9}$  se obtêm as soluções  $X_n = e^{-x}\text{sen}(\frac{n\pi}{3}x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Por outro lado

$$\frac{T'}{T} = -1 - \frac{n^2\pi^2}{9} \Leftrightarrow T_n(t) = e^{(-1 - \frac{n^2\pi^2}{9})t}$$

Tem-se então, que para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n(x, t) = e^{(-1 - \frac{n^2\pi^2}{9})t} e^{-x} \text{sen}(\frac{n\pi}{3}x)$$

é solução da equação diferencial mais as condições de fronteira, pelo que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{(-1 - \frac{n^2\pi^2}{9})t} e^{-x} \text{sen}(\frac{n\pi}{3}x)$$

é também (formalmente) solução. Finalmente, dado que  $u(x, 0) = e^{-x}f(x)$ , tem-se que (usando o resultado de (a))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-x} \text{sen}(\frac{n\pi}{3}x) = e^{-x}f(x) = e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left( \cos(\frac{n\pi}{3}) - \cos(\frac{2n\pi}{3}) \right) \text{sen}(\frac{n\pi}{3}x)$$

pelo que

$$\alpha_n = \frac{2}{n\pi} \left( \cos(\frac{n\pi}{3}) - \cos(\frac{2n\pi}{3}) \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e como tal a solução de (2) é

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left( \cos(\frac{n\pi}{3}) - \cos(\frac{2n\pi}{3}) \right) e^{(-1 - \frac{n^2\pi^2}{9})t} e^{-x} \text{sen}(\frac{n\pi}{3}x)$$

( 1 val.) 5. Considere o problema de valor inicial

$$y' = y^2 - \cos(te^y) + 1, \quad y(0) = 1.$$

Mostre que o PVI admite solução única localmente, e que existe  $\alpha \in ]0, 1[$ , tal que

$$\lim_{t \rightarrow \alpha^-} y(t) = +\infty$$

**Resolução:**

Sendo  $f(t, y) = y^2 - \cos(te^y) + 1$ , é óbvio que  $f$  está definida para todo  $(t, y) \in \mathbb{R}^2$  e é contínua em  $\mathbb{R}^2$ . Por outro lado, dado que a função

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + te^y \sin(te^y)$$

é também contínua em  $\mathbb{R}^2$ ,  $f$  é localmente lipschitziana em  $D = \mathbb{R}^2$ . O Teorema de Picard garante assim existência e unicidade de solução do PVI,  $y(t)$  para  $t$  pertencente a uma vizinhança de 0.

Para mostrar que a solução explode para certo  $\alpha$ , vamos usar comparação. Assim

$$f(t, y) \geq y^2, \quad \forall (t, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (3)$$

considere-se o PVI

$$u' = u^2, \quad u(0) = 1.$$

que tem como solução  $u(t) = \frac{1}{1-t}$  definida em  $] -\infty, 1[$ . Por (3),

$$y(t) \geq \frac{1}{1-t}, \quad \forall t \geq 0$$

Visto a função  $u(t) \rightarrow +\infty$  quando  $t \rightarrow 1^-$ , a função  $y$  terá também que convergir para  $+\infty$  quando  $t \rightarrow \alpha$  com  $0 < \alpha \leq 1$ .