Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática IV

1º Semestre 2006/2007

1º Teste

Cursos: LEEC e LEIC

28 de Outubro de 2006, 13h

Duração do Teste: 1h30m

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

(3 val.) **1.** Considere a função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$u(x, y) = \beta y^2 - 2x^2 + 3\beta x \quad , \quad \beta \in \mathbb{R}$$

(a) Determine os valores de β para os quais a função u é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

(b) Para $\beta = 2$, determine a função $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $f = u + iv$ é inteira e verifica $f(0) = i$.

(c) Calcule o valor do integral

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz$$

em que $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 1\}$ é percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução:

(a) Dado que a função u é um polinómio, $u \in C^2(\mathbb{R})$. Por outro lado

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -4x + 3\beta \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2\beta y$$

pelo que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\beta$$

Conclui-se que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4 + 2\beta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta = 2$$

(b) Sendo $fu + ov$ inteira, verificam-se as condições de Cauchy-Riemann em todos os pontos. Assim

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad v(x, y) = \int (-4x + 6) dy + C(x) = -4xy + 6y + C(x)$$

Por outro lado

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad 4y = -(-4y + C'(x)) \quad \Rightarrow \quad C(x) = C$$

Tendo-se então que

$$v(x, y) = -4xy + 6y + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

Visto $f(0) = i$ teremos $u(0,0) = 0$ (o que se verifica) e $v(0,0) = 1$, o que implica $C = 1$, e finalmente

$$v(x,y) = -4xy + 6y + 1$$

(c) Pela alínea anterior f é inteira, e é óvio que $1 \in \operatorname{int} \gamma$. Então por a+licação da fórmula intefral de Cauchy

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz = 2\pi i f'(1) = 2\pi i \Big(\frac{\partial u}{\partial x}(1,0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(1,0) \Big) = 4\pi i$$

(2 val.) **2.** Calcule o valor do integral

$$\oint_\gamma \frac{z}{(z-\pi)\text{sen}^2 z} \, dz$$

considerando $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| + |z| = 2\}$, percorrida uma vez no sentido positivo.

Resolução:

Sendo $f(z) = \frac{z}{(z-\pi)\text{sen}^2 z}$, f é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{(z-\pi)\text{sen}^2 z = 0\}$ pelo que as singularidades de f são $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Por outro lado

$$|k\pi - 1| + |k\pi| < 2 \quad \Leftrightarrow \quad k = 0$$

e pelo Teorema dos Resíduos

$$\oint_\gamma \frac{z}{(z-\pi)\text{sen}^2 z} \, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0)$$

Para classificar a singularidade,

$$\lim_{z \to 0} z f(z) = -\frac{1}{\pi}$$

concluindo-se que 0 é um polo simples e que $\operatorname{Res}(f,0) = -\frac{1}{\pi}$. Então

$$\oint_\gamma \frac{z}{(z-\pi)\text{sen}^2 z} \, dz = -2i$$

(2 val.) **3.** Utilize o Teorema dos resíduos para determinar o valor

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+9} dx.$$

Resolução:

Considere-se a função complexa de variável complexa

$$F(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+9}$$

e para $R > 0$ suficientemente grande ($R > 3$), a curva

$$C_R = I_R \cup S_R = \{z = x \in]-R, R[\} \cup \{z = Re^{i\theta}, \theta \in]0, \pi[\}$$

A função F é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{-3i, 3i\}$ e é óbvio que $3i \in \operatorname{int} C_R$ e $-3i \notin \operatorname{int} C_R$. Visto

$$\lim_{z \to 3i} (z - 3i) F(z) = \frac{e^{-3}}{6i}$$

conclui-se que $3i$ é um polo simples e que Res $(F, 3i) = \frac{e^{-3}}{6i}$. Por aplicação do teorema dos resíduos obtem-se

$$\int_{C_R} F(z)\, dz = \frac{\pi e^{-3}}{3}$$

Por outro lado, e atendendo a que $C_R = I_R \cup S_R$

$$\int_{I_R} F(z)\, dz + \int_{S_R} F(z)\, dz = \frac{\pi e^{-3}}{3},$$

e pela definição de I_R

$$\int_{-R}^{R} F(x)\, dx + \int_{S_R} F(z)\, dz = \frac{\pi e^{-3}}{3},$$

Fazendo R convergir para $+\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx + \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} F(z)\, dz = \frac{\pi e^{-3}}{3}$$

A função $f(z) = \frac{1}{z^2+9}$ é analítica no conjunto $\{z : \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{3i\}$, e para $|z| = R$

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{z^2+9}\right| \leq \frac{1}{||z^2| - 9|} = \frac{1}{R^2 - 9} \equiv M(R)$$

tendo-se obviamente que $M(R) \to 0$ quando $R \to \infty$. Estamos então nas condições do Lema de Jordan, e como tal podemos concluir que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} f(z) e^{iz}\, dz = \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} F(z)\, dz = 0$$

pelo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx = \frac{\pi e^{-3}}{3}$$

Finalmente, para $x \in \mathbb{R}$, $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ e como tal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+9} dx = \operatorname{Re} \frac{\pi e^{-3}}{3} = \frac{\pi e^{-3}}{3}$$

(2 val.) **4.** (a) Obtenha o desenvolvimento em série de Laurent em torno de $z_0 = 0$ da função de variável complexa definida por

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + \pi^2}.$$

válido na região $|z| > \pi$.

(b) Calcule

$$\oint_{|z|=2} z^6 e^{1/z}\, dz$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução:

(a) Visto a região de convergência ser $|z| > \pi$, o que é equivalente a $\left|\frac{\pi}{z}\right| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + \pi^2} = \frac{1}{z^2(1 + \frac{\pi^2}{z^2})} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{z^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{z^{2n+2}}$$

(b) A função

$$f(z) = z^6 e^{1/z}$$

é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dado que, para $|z| > 0$,

$$f(z) = z^6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^{n-6}}$$

conclui-se que 0 é uma singularidade essencial e que Res $(f, 0) = \frac{1}{7!}$. Por aplicação do Teorema dos Resíduos (e dado que $|0| < 2$),

$$\oint_{|z|=2} z^6 e^{1/z} \, dz = \frac{2\pi i}{7!}$$

(1 val.) **5.** Seja F uma função inteira tal que

$$f(z) = F\Big(\frac{1}{z-1}\Big)$$

tem um polo. Mostre que F é um polinómio.,

Resolução:

Dado que F é uma função inteira e a função $\frac{1}{z-1}$ tem uma singularidade em 1, concluimos que f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Po F ser inteira, tem-se que para todo $w \in \mathbb{C}$

$$F(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$$

o que implica que para $|z - 1| > 0$, se tem

$$f(z) = F\Big(\frac{1}{z-1}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^{-n} = a_0 + \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{(z-1)^2} + \frac{a_3}{(z-1)^3} + ...$$

Como é dado que 1 é polo de F, existe $p > 0$ tal que

$$a_p \neq 0 \quad \text{e} \quad a_k = 0 \quad \forall k > p$$

caso contrário 1 seria uma singularidade essencial. Tem-se então que

$$F(w) = \sum_{n=0}^{p} a_n w^n = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + ... + a_p w^p$$

concluindo-se que F é um polinómio.