

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

1º Teste / Recuperação

(LEAM, LEAN, LEBL, LEC, LEEC, LEGM, LEM, LEMAT, LEQ, LQ)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 18/06/2007, 13h00

Duração: 1h30.

(1,5 val.) 1) Seja $u(x, y) = e^y \cos x + y(x + 2)$. Mostre que u é harmónica em \mathbf{R}^2 e determine uma função $v : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ de tal modo que $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ seja uma função analítica e verifique $f(\pi) = -1$.

(2 val.) 2) Calcule o valor dos integrais

$$\text{a) } \oint_{|z-1|=\frac{1}{2007}} \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{z}\right)} dz, \quad \text{b) } \oint_{|z+1|=1} \left(\frac{z}{z+1}\right)^n dz.$$

em que $n \in \mathbb{N}$ e as curvas são percorridas uma vez no sentido directo.

(2,5 val.) (3) Considere a função $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2} + \frac{1}{z^2 - iz}$.

a) Determine as séries de Laurent de f nas regiões

$$\text{i) } \{z : 0 < |z| < 1\}, \quad \text{ii) } \{z : |z| > 1\}.$$

b) Determine e classifique as singularidades de f , calculando os resíduos nesses pontos.

(2,5 val.) 4) Aplique convenientemente o teorema dos resíduos para mostrar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(3 + 2 \operatorname{sen}(\theta))^2} d\theta = \frac{6\pi}{5^{3/2}}.$$

(1,5 val.) 5) Seja $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica no conjunto aberto e conexo A . Mostre que, se $|f(z)|$ é constante para todo o $z \in A$, então $f(z)$ também é constante.