Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

1º Teste

(LEAM, LEBL, LEC, LEEC, LEM, LEGM, LEMAT, LEN, LEQ, LQ)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 21/04/2007, 15h00
Duração: 1h30.

(3 val.) 1) Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por $u(x,y) = 2\,\text{sen}\,x\cosh y - 3x^2y + \beta y^3$.

(a) Determine $\beta \in \mathbb{R}$, de modo a que u seja harmónica em $\mathbb{R}^2$.

(b) Determine uma função $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, harmónica conjugada de u, de modo a que função complexa inteira $f(z) = u(z) + iv(z)$ satisfaça $f(\pi) = i$.

(c) Com a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, obtida na alínea anterior, calcule

$$\oint_{|z|=100} f(z)\left(\frac{1}{(z-\pi)} + \frac{1}{z^3}\right)\,dz,$$

em que a curva de Jordan é percorrida uma vez no sentido positivo.

Resolução:

(a) Dado que, qualquer que seja $\beta \in \mathbb{R}$, a função $u(x,y)$ tem duas derivadas contínuas em $\mathbb{R}^2$, basta verificar para que valores de β se verifica $\Delta\, u(x,y) = 0$. Assim

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\cos x\cosh y - 6xy \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2\,\text{sen}\,x\,\text{senh}\,y - 3x^2 + 3\beta y^2$$

o que implica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2\,\text{sen}\,x\cosh y - 6y \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\,\text{sen}\,x\cosh y - +6\beta y$$

Tem-se então que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6y + 6\beta y$$

Concluindo-se que a função u é harmónica em $\mathbb{R}^2$ se e só se $\beta = 1$.

(b) Começamos por notar que se $u =$Re f e f é inteira, então u tem de ser harmónica pelo que teremos que considerar $\beta = 1$. Também por f ser inteira, as funções u e v têm de verificar as condições de Cauchy-Riemann em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2\cos x\cosh y - 6xy \quad \Rightarrow \quad v(x,y) = 2\cos x\,\text{senh}\,y - 3xy^2 + C(x)$$

Por outro lado

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad -2\,\text{sen}\,x\,\text{senh}\,y - 3y^2 + C'(x) = -\Big(2\,\text{sen}\,x\,\text{senh}\,y - 3x^2 + 3y^2\Big)$$

pelo que

$$C(x) = x^3 + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

Conclui-se que

$$f(z) = f(x+iy) = 2\,\mathsf{sen}\,x \cosh y - 3x^2y + y^3 + i(2\cos x\,\mathsf{senh}\,y - 3xy^2 + x^3 + c)$$

com c constante real. Finalmente, $f(\pi) = i$ implica $u(\pi,0) = 0$ (o que se verifica) e $v(\pi,0) = 1$ implica que $c = 1 - \pi^3$.

(c) Por linearidade

$$\oint_{|z|=100} f(z)\left(\frac{1}{(z-\pi)} + \frac{1}{z^3}\right)\,dz = \oint_{|z|=100} \frac{f(z)}{(z-\pi)}dz + \oint_{|z|=100} \frac{f(z)}{z^3}\,dz,$$

Atendendo a que f é inteira e que tanto π como 0 pertencem ao interior da curva, podemos aplicar a ambos os integrais a fórmula integral de Cauchy, obtendo-se

$$\oint_{|z|=100} f(z)\left(\frac{1}{(z-\pi)} + \frac{1}{z^3}\right)\,dz = 2\pi i\Big(f(\pi) + \frac{1}{2}f''(0)\Big)$$

Por (b) $f(\pi) = i$, e

$$f''(0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0) + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0,0) = 0$$

Conclui-se

$$\oint_{|z|=100} f(z)\left(\frac{1}{(z-\pi)} + \frac{1}{z^3}\right)\,dz = -2\pi$$

(3,5 val.) 2) Seja $g(z) = (z-2)^3 \cos\left(\dfrac{1}{z-2}\right) + \dfrac{2}{z^2-4}$.

(a) Determine e classifique as singularidades de g.

(b) Escreva um desenvolvimento de $g(z)$ em potências de $(z-2)$ válido na região $0 < |z-2| < 1$. Qual a maior região onde este desenvolvimento é válido?

(c) Sendo $h(z) = \dfrac{z}{(z-1)\,\mathsf{sen}\,(i\pi z)}$, calcule o integral

$$\oint_{|z-1-\frac{i}{2}|=\sqrt{2}} \big(g(z) + h(z)\big)\,dz,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido positivo.

Resolução:

(a) A função g apenas não é diferenciável nos pontos em que não está sequer definida, ou seja, quando os denominadores das fracções envolvidas se anulam:

$$z - 2 = 0 \qquad \text{e} \qquad z^2 - 4 = 0.$$

Nos restantes pontos, a função é constituída por somas, produtos, quocientes e uma composta de funções diferenciáveis, pelo que é diferenciável em todos esses pontos.

Resolvendo as duas equações elementares obtêm-se então as singularidades isoladas $z = 2$ e $z = -2$.

O ponto $z = -2$ é um pólo simples, pois tem-se

$$\lim_{z \to -2} g(z) = \lim_{z \to -2} \left((z-2)^3 \cos\left(\frac{1}{z-2}\right) + \frac{2}{z^2-4} \right) = \infty,$$

e

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to -2} (z+2) g(z) &= \lim_{z \to -2} \left((z+2)(z-2)^3 \cos\left(\frac{1}{z-2}\right) + \frac{2(z+2)}{z^2-4} \right) = \\
&= 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \quad (\neq 0, \infty),
\end{aligned}$$

donde até já se conclui que o resíduo de g em $z = -2$ vale $\operatorname{Res}(g, -2) = -1/2$.

O ponto $z = 2$ é uma singularidade essencial de g porque o limite

$$\lim_{z \to 2} (z-2)\, g(z) = \lim_{z \to 2} \left((z-2)^4 \cos\left(\frac{1}{z-2}\right) + \frac{2(z-2)}{z^2-4} \right),$$

não existe devido ao termo do coseno. Por exemplo, se se considerar a sucessão $z_n = 2 + \frac{i}{n}$ que tende para 2, verifica-se facilmente que $(z_n - 2)\, g(z_n) \to \infty$, enquanto que a sucessão $z_n = 2 + \frac{1}{n}$, que também converge para 2, satisfaz $(z_n - 2)\, g(z_n) \to 1/2$. Não podendo portanto haver limite da função $(z-2)\, g(z)$, quando $z \to 2$, a singularidade não pode ser removível (caso em que o limite daria necessariamente zero) ou um pólo (caso em que o limite seria finito, para um pólo simples, ou infinito, para um pólo de ordem superior). Só pode ser, concluindo, uma singularidade essencial.

Alternativamente, para justificar esta classificação da singularidade isolada em $z = 2$, poder-se-ia também já aqui fazer o desenvolvimento em série de Laurent de g, em torno de $z = 2$, e imediatamente se verificaria que a parte principal da série correspondente ao coseno exibe infinitos termos não nulos, das potências negativas de $(z-2)$. Mas isso é precisamente parte da resposta à alínea seguinte, pelo que se podem verificar os correspondentes detalhes na resposta a (b), já a seguir.

(b) Com certeza, antes sequer de fazer qualquer cálculo, o teorema de Laurent garante logo à partida a convergência da correspondente série na maior coroa circular centrada em $z = 2$ e contida na região de analiticidade de g. Ora, uma coroa circular centrada em $z = 2$, e de raio interior 0, poderá ter raio exterior pelo menos igual a 4, que é a distância que separa o ponto $z = 2$ da singularidade mais próxima em $z = -2$. Por outro lado, essa singularidade é um pólo simples, como se viu na alínea anterior, pelo que o raio exterior da coroa não poderá mesmo ultrapassar 4 e incluir esse ponto: caso contrário, ter-se-ia um ponto em que a série de Laurent convergiria para um valor finito, mas a função que ela representa tende para infinito nesse ponto. Conclui-se assim que a maior região que contém o conjunto indicado $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-2| < 1\}$, em que a série de Laurent ainda converge e representa g é o conjunto $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-2| < 4\}$.

Quanto ao desenvolvimento em série nessa região, relembre-se que se tem:

$$\cos(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, w^{2n},$$

pelo que

$$\begin{aligned}
(z-2)^3 \cos\left(\frac{1}{z-2}\right) &= (z-2)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{(z-2)^{2n}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{(z-2)^{2n-3}},
\end{aligned}$$

que converge para todo o $z \neq 2$, ou seja, $|z-2| > 0$. Quanto ao termo $\dfrac{2}{z^2-4}$ tem-se

$$\frac{2}{z^2-4} = \frac{2}{(z-2)(z+2)}$$

e a fracção $\dfrac{2}{z+2}$ pode ser escrita como uma série geométrica

$$\frac{2}{z+2} = \frac{2}{4+(z-2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{z-2}{4}\right)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(-\frac{z-2}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\cdot 4^n}(z-2)^n,$$

que converge quando $\left|\frac{z-2}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-2| < 4$, donde

$$\frac{2}{z^2-4} = \frac{1}{z-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\cdot 4^n}(z-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\cdot 4^n}(z-2)^{n-1}.$$

Agrupando as duas séries obtém-se, para $0 < |z-2| < 4$,

$$\begin{aligned}
g(z) &= (z-2)^3 \cos\left(\frac{1}{z-2}\right) + \frac{2}{z^2-4} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{(z-2)^{2n-3}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\cdot 4^n}(z-2)^{n-1} \\
&= \left[(z-2)^3 - \frac{1}{2}(z-2) + \frac{1}{4!}\frac{1}{(z-2)} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{(z-2)^{2n-3}}\right] + \\
&\quad + \left[\frac{1}{2}\frac{1}{(z-2)} - \frac{1}{8} + \frac{1}{32}(z-2) - \frac{1}{2\cdot 4^3}(z-2)^2 + \frac{1}{2\cdot 4^4}(z-2)^3 + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\cdot 4^{n+1}}(z-2)^n\right] \\
&= \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\cdot 4^{n+1}}(z-2)^n + \left(1 + \frac{1}{2\cdot 4^4}\right)(z-2)^3 - \frac{1}{2\cdot 4^3}(z-2)^2 - \\
&\quad - \frac{15}{32}(z-2) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4!}\right)\frac{1}{(z-2)} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{1}{(z-2)^{2n-3}}.
\end{aligned}$$

Daqui se conclui, de novo, que pelo facto da série incluir infintos termos com potências negativas de $(z-2)$, a singularidade em 2 é essencial. O resíduo nesse ponto é dado pelo coeficiente do termo $(z-2)^{-1}$ ou seja

$$\text{Res}(g, 2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4!} = \frac{13}{24}.$$

(c) A curva $|z-1-\frac{i}{2}|=\sqrt{2}$ é uma circunferência de raio $\sqrt{2}$ centrada em $z=1+\frac{i}{2}$. As singularidades da função g já foram estudadas nas alíneas anteriores, são os pontos $z=2$ e $z=-2$, sendo que, delas, apenas $z=2$ se encontra no interior da curva em questão. Quanto à função h, ela tem singularidades isoladas nos pontos:

$$z-1=0 \Leftrightarrow z=1$$

e

$$\text{sen}\,(i\pi z)=0 \Leftrightarrow z=i\,k \qquad \text{com} \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Destas singularidades isoladas, apenas $z=1$, $z=0$ e $z=i$ estão dentro da curva de integração. Os resíduos da soma $g+h$ obviamente são iguais à soma dos resíduos de cada uma das duas funções, g e h, em cada ponto. Mas visto que as singularidades de g e h não conicidem, tem-se então

$$\begin{aligned}
\text{Res}\,(g+h,2) &= \text{Res}\,(g,2),\\
\text{Res}\,(g+h,1) &= \text{Res}\,(h,1),\\
\text{Res}\,(g+h,0) &= \text{Res}\,(h,0),\\
\text{Res}\,(g+h,i) &= \text{Res}\,(h,i).
\end{aligned}$$

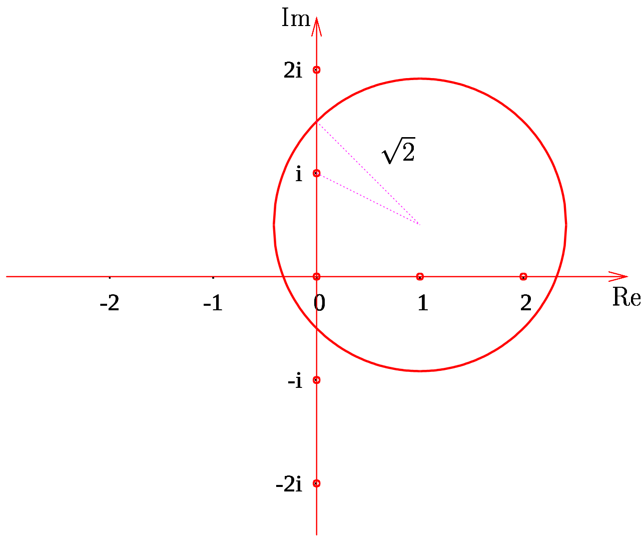

Figura 1: Singularidades de $g+h$

O resíduo Res$\,(g,2)$ já foi determinado na alínea anterior e vale $13/24$. Quanto aos restantes, tem-se que $z=0$ é uma singularidade removível de h pois

$$\lim_{z\to 0} h(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{(z-1)\,\text{sen}\,(i\pi z)} = \frac{i}{\pi},$$

pelo que Res$\,(h,0)=0$. O ponto $z=1$ é obviamente um pólo simples e tem-se

$$\text{Res}\,(h,1) = \lim_{z\to 1}(z-1)\,h(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z}{\text{sen}\,(i\pi z)} = \frac{1}{\text{sen}\,(i\pi)} = -\frac{i}{\text{senh}\,(\pi)}.$$

Finalmente, o ponto $z=i$ também é um pólo simples pois, pela Regra de Cauchy, verifica-se

$$\lim_{z\to i} \frac{(z-i)}{\text{sen}\,(i\pi z)} = \lim_{z\to i} \frac{1}{i\pi\,\text{cos}\,(i\pi z)} = \frac{i}{\pi},$$

donde

$$\text{Res}\,(h,i) = \lim_{z\to i}(z-i)\,h(z) = \lim_{z\to i}\frac{(z-i)z}{(z-1)\,\text{sen}\,(i\pi z)} = \frac{i^2}{(i-1)\pi} = -\frac{1}{(i-1)\pi} = \frac{i+1}{2\pi}.$$

Conclui-se finalmente, pelo teorema dos resíduos, que o integral pedido é igual a

$$\begin{aligned} 2\pi i\Big(\text{Res}\,(g,2)+\text{Res}\,(h,1)+\text{Res}\,(h,0)+\text{Res}\,(h,i)\Big) &= 2\pi i\left(\frac{13}{24}-\frac{i}{\text{senh}\,(\pi)}+\frac{i+1}{2\pi}\right) \\ &= \frac{13}{12}\pi i+\frac{2\pi}{\text{senh}\,(\pi)}+i-1 \\ &= \left(\frac{2\pi}{\text{senh}\,(\pi)}-1\right)+i\left(\frac{13}{12}\pi+1\right). \end{aligned}$$

(2 val.) 3) Seja γ a fronteira da região $D_R = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : 0 < r < R, \quad 0 < \theta < \pi\}$, com $R > 1/\sqrt{2}$ à qual se atribui a orientação positiva. Seja $F(z) = \dfrac{1}{(2z^2+1)^2}$.

(a) Calcule o integral:

$$\oint_\gamma F(z)\,dz.$$

(b) Mostre que:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(2x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

Resolução:

(a) As singularidades de $F(z)$ são $\pm\frac{i}{\sqrt{2}}$. Dado que $\frac{i}{\sqrt{2}} \in D_R$ e $-\frac{i}{\sqrt{2}} \notin D_R$, por aplicação do teorema dos resíduos

$$\oint_\gamma F(z)\,dz = 2\pi i \text{Res}\,(F, \frac{i}{\sqrt{2}})$$

Visto

$$\lim_{z\to\frac{i}{\sqrt{2}}}(z-\frac{i}{\sqrt{2}})^2F(z) = -\frac{1}{8}$$

a singularidade é polo de 2ª ordem, e como tal

$$\text{Res}\,(F, \frac{i}{\sqrt{2}}) = \lim_{z\to\frac{i}{\sqrt{2}}}\Big((z-\frac{i}{\sqrt{2}})^2F(z)\Big)' = -\frac{i}{4\sqrt{2}}$$

Então

$$\oint_\gamma F(z)\,dz = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(b) Começmos por notar que, por a função integranda ser par

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(2x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(2x^2+1)^2}$$

Para calcular este integral, consideramos como é hábito, o integral calculado na alínea (a). Atendendo ao facto de que a curva γ é composta pelo sgemnto

$$I = \{z \in \mathbb{C} \,:\, z = x \,,\, x \in [-R, R[\}$$

e pela semicircunferência

$$S = \{z \in \mathbb{C} \,:\, z = Re^{i\theta} \,,\, \theta \in [0, \pi[\}$$

podemos escrever

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \int_I F(z)\,dz + \int_S F(z)\,dz$$

Em I, $z = x$ com $x \in [-R, R]$, pelo que

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \int_{-R}^{R} F(x)\,dx + \int_S F(z)\,dz$$

e, fazendo R convergir para ∞

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx + \lim_{R\to\infty} \int_S F(z)\,dz$$

Por outro lado

$$\Big| \int_S F(z)\,dz \Big| \le \int_S |F(z)|\,|dz| \le \int_S \frac{1}{|2|z|^2 - 1|^2} |dz = \frac{\pi R}{(2R^2 - 1)^2}$$

Temos então que

$$\lim_{R\to\infty} \Big| \int_S F(z)\,dz \Big| \le \lim_{R\to\infty} \frac{\pi R}{(2R^2 - 1)^2} = 0$$

o que implica

$$\lim_{R\to\infty} \int_S F(z)\,dz = 0$$

e como tal

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Finalmente

$$\int_{0}^{\infty} F(x)\,dx = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

como se pedia.

(1,5 val.) 4) Considere a função $f(z) = z - \operatorname{sen} z$.

(a) Justifique que f admite desenvolvimento em série de Taylor em torno de $z = 0$, determine-o e indique a respectiva região de convergência.

(b) Classifique a singularidade 0 da função $h(z) = \frac{1}{f(z)}$ e determine o respectivo resíduo.

Resolução:

(a) Uma vez que a função $\operatorname{sen} z$ é uma função diferenciável em todo o plano complexo e verifica

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

para todo o $z \in \mathbb{C}$, temos que $f(z) = z - \operatorname{sen} z$ é também diferenciável em todo o plano complexo, e podemos escrever

$$f(z) = z - \operatorname{sen} z = z - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Portanto, pelo teorema de Taylor, esta função é analítica em $\mathbb{C}$ e a região de convergência é todo o plano complexo.

(b) Temos

$$h(z) = \frac{1}{z - \operatorname{sen} z} = \frac{1}{\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \cdots} = \frac{\frac{3!}{z^3}}{1 - 3!(\frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + \cdots)},$$

e portanto,

$$\lim_{z\to 0} z^3 h(z) = \lim_{z\to 0} \frac{3!}{1 - 3!(\frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + \cdots)} = 3! = 6.$$

Como este limite é não nulo, concluimos que $z = 0$ é um polo de ordem 3 da função $h(z)$. Note-se que, usando o desenvolvimento de (a), pode provar-se que existe um disco $\mathbb{D}(0, r)$, com $r > 0$ onde $z - \operatorname{sen} z$ não se anula, pelo que $z = 0$ é uma singularidade isolada.

O seu resíduo pode ser calculado usando o desenvolvimento em série de Laurent, que terá apenas potências ímpares de z,

$$h(z) = \frac{b_3}{z^3} + \frac{b_1}{z} + a_1 z + a_3 z^3 + \cdots$$

dado que $h(z)$ é ímpar. Então a igualdade

$$h(z) = \frac{1}{\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \cdots} = \frac{b_3}{z^3} + \frac{b_1}{z} + a_1 z + a_3 z^3 + \cdots ,$$

válida para $0 < |z| < r$, implica que

$$(\frac{b_3}{z^3} + \frac{b_1}{z} + a_1 z + \cdots)(\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \cdots) = \frac{b_3}{3!} + (\frac{b_1}{3!} - \frac{b_3}{5!})z^2 + \cdots \equiv 1,$$

de onde concluimos que $b_3 = 6$ (que confirma o limite acima) e $\frac{b_1}{3!} - \frac{b_3}{5!} = 0$, ou seja

$$b_1 = \operatorname{Res}(h, 0) = \frac{3}{10}.$$