

Análise Matemática IV
2º Semestre 2001/2002
2º Teste e 1º Exame - Todos os cursos excepto LEFT, LMAC
21 de Junho de 2002

Exame: resolva todas as questões. Duração do exame: 3 h
Teste: resolva apenas as questões 6 a 9. Duração do teste: 90 min
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(2 val.) 1. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função inteira dada por

$$f(x + iy) = x^2 + \alpha(y) + i(2y - 1)\beta(x)$$

onde α e β são funções $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Determine estas duas funções explicitamente, de modo a que seja satisfeita a condição $f(0) = 1$.

Resolução: Como f é uma função inteira, as suas partes real e imaginária são infinitamente diferenciáveis e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em todos os pontos $z = x + iy$ do plano complexo. Assim, escrevendo

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy)) = x^2 + \alpha(y) \quad \text{e} \quad v(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy)) = (2y - 1)\beta(x)$$

tem-se que, necessariamente

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2x = 2\beta(x) \\ \alpha'(y) = (1 - 2y)\beta'(x). \end{cases}$$

Da primeira equação conclui-se imediatamente que

$$\beta(x) = x$$

e substituindo na segunda equação, que $\beta'(x) = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} \alpha'(y) &= 1 - 2y \\ \Rightarrow \alpha(y) &= y - y^2 + c, \quad \text{com } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A constante c pode ser finalmente determinada utilizando a condição dada

$$f(0) = c = 1.$$

(2 val.) 2. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)}.$$

Determine o maior valor de $R > 0$ e a correspondente sucessão $\{c_n\}$ tal que f pode ser representada pela série

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{z^n} \quad \text{para todo } 0 < |z| < R.$$

Resolução: Tem-se no aberto $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z+1}{z(z-1)} = \frac{z+1}{z} \cdot \frac{1}{z-1} = \left(1 + \frac{1}{z}\right) \cdot \frac{-1}{1-z} \\ &= \left(1 + \frac{1}{z}\right) \cdot (-1) \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= -1(1 + z + z^2 + \dots) - (z^{-1} + 1 + z + z^2 + \dots) \\ &= -\frac{1}{z} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} z^n. \end{aligned}$$

Logo $R = 1$, $c_n = 0$ para $n > 1$, $c_1 = -1$ e $c_n = -2$ para $n \leq 0$.

(2,5 val.) 3. Calcule o seguinte integral, por aplicação conveniente do teorema dos resíduos

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(5+3\cos\theta)^2}.$$

Resolução: Dado que a função integranda é par e periódica de período 2π , temos

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(5+3\cos\theta)^2} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5+3\cos\theta)^2}.$$

Para determinar este integral, considera-se a circunferência unitária $|z| = 1$, parametrizada de acordo com $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Temos então $dz = ie^{i\theta} d\theta$ e

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) ie^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2(5+3\cos\theta)^2}.$$

Dado que $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + (e^{i\theta})^{-1})$, podemos escrever

$$f(e^{i\theta}) = \frac{1}{2ie^{i\theta} (5 + \frac{3}{2}(e^{i\theta} + (e^{i\theta})^{-1}))^2},$$

de onde se determina $f(z)$

$$f(z) = \frac{2z}{4iz^2 (5 + \frac{3}{2}(z + z^{-1}))^2} = \frac{2z}{i(10z + 3z^2 + 3)^2} = \frac{2z}{9i(z+3)^2(z+\frac{1}{3})^2}.$$

Esta função tem singularidades isoladas somente nos pontos $z_1 = -3$ e $z_2 = -\frac{1}{3}$. Como apenas o ponto $z_2 = -\frac{1}{3}$ se encontra dentro da circunferência unitária, vamos classificar esta singularidade, de forma a aplicar o teorema dos resíduos. Dado que

$$f(z)(z + \frac{1}{3})^2 = \frac{2z}{9i(z+3)^2}$$

é uma função diferenciável numa vizinhança de $-\frac{1}{3}$, este é um polo duplo, assim

$$\text{Res}(f, -\frac{1}{3}) = \frac{d}{dz} \left(\frac{2z}{9i(z+3)^2} \right) \Big|_{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{9i} \frac{3-z}{(z+3)^3} \Big|_{-\frac{1}{3}} = \frac{5}{128i}$$

Finalmente, pelo teorema dos resíduos, obtemos

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(5+3\cos\theta)^2} = \oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \frac{5}{128i} = \frac{5}{64}\pi.$$

(2 val.) 4. Determine a solução da equação diferencial ordinária

$$y' + \frac{2}{t}y = \frac{\sin t}{t} \quad t > 0,$$

que satisfaz a condição inicial $y(\pi) = 0$.

Resolução: Trata-se de uma equação linear de primeira ordem. Multiplicando ambos os membros da equação pelo factor integrante

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t} dt} = e^{2\log t} = t^2, \quad t > 0$$

a equação pode ser escrita na forma

$$\frac{d}{dt}(t^2 y) = t \sin t$$

pelo que

$$t^2 y = \int t \sin t dt + C = -t \cos t + \sin t + C$$

e, para $t > 0$, a solução da equação diferencial é

$$y(t) = -\frac{\cos t}{t} + \frac{\sin t}{t^2} + \frac{C}{t^2}$$

Usando a condição inicial $y(\pi) = 0$, obtém-se $C = -\pi$, e a solução do problema de valor inicial é dada por

$$y(t) = -\frac{\cos t}{t} + \frac{\sin t}{t^2} - \frac{\pi}{t^2}$$

(1,5 val.) 5. Seja $f : B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa, onde $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Mostre que se $|f|$ é constante então f também é constante.

Resolução: A condição $|f| = \text{const.}$ significa que

$$|f(z)| = \sqrt{(u(x,y))^2 + (v(x,y))^2} = \text{const.}$$

ou, o que é equivalente,

$$|f(z)|^2 = (u(x,y))^2 + (v(x,y))^2 = \text{const.},$$

para todo o $z = x + iy \in B_1(0)$. Mas isto não significa necessariamente que $u(x,y)$ e $v(x,y)$ sejam constantes, que é o que queremos concluir (veja, por exemplo, a função $f(x + iy) = x + i\sqrt{1-x^2}$, que satisfaz $|f| = \text{const.}$ mas que não é constante). O que se pede para mostrar é que, no caso da função ser holomorfa (que obviamente o contra-exemplo anterior não é) quando o módulo da função é constante, a própria função também o será. Note também que não pode usar aqui o Teorema de Liouville, visto que este só é aplicável a funções definidas e diferenciáveis em todo o $\mathbb{C}$, o que não é aqui o caso.

A demonstração deste resultado segue então o seguinte raciocínio. Se $|f(z)| = 0$, então

$$(u(x,y))^2 + (v(x,y))^2 = 0$$

e não há obviamente outra hipótese, que não seja ter-se aqui

$$u(x,y) = 0 \quad \text{e} \quad v(x,y) = 0,$$

donde se conclui que neste caso $f = 0$, e é portanto constante.

Excluindo agora o caso da constante ser 0, suponha-se então que $|f| = \text{const.} \neq 0$. Derivando a equação

$$(u(x,y))^2 + (v(x,y))^2 = \text{const.}$$

primeiro em ordem a x e depois em ordem a y chega-se ao sistema

$$\begin{cases} 2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ 2u \frac{\partial u}{\partial y} + 2v \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Usando agora o facto de que a função é holomorfa, aplicam-se as condições de Cauchy-Riemann para, neste sistema, substituir as derivadas de v por derivadas de u

$$\begin{cases} 2u \frac{\partial u}{\partial x} - 2v \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ 2u \frac{\partial u}{\partial y} + 2v \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u & -v \\ v & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O determinante da matriz deste sistema é $u^2 + v^2$ que, por hipótese é constante e diferente de zero. Conclui-se assim que a única solução é

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

o que, no círculo de raio 1 centrado na origem implica que a função $u(x,y)$ é constante. Utilizando as equações de Cauchy-Riemann, conclui-se que as derivadas parciais de v também são zero, e portanto $v(x,y)$ é igualmente constante.

(2,5 val.) 6. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$t + ye^{2ty} + \alpha te^{2ty} \frac{dy}{dt} = 0, \quad y(1) = 0$$

em que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Sem resolver a equação, mostre que o problema admite solução única definida numa vizinhança de $t = 1$.
- Determine o valor de α para o qual a equação é exacta. Para esse valor, resolva o problema e indique o intervalo máximo de solução.

Resolução:

a) Uma vez que $\alpha \neq 0$, podemos escrever a equação na forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad \text{onde} \quad f(t, y) = \frac{t + ye^{2ty}}{\alpha te^{2ty}}.$$

A função $f(t, y)$ é de classe C^∞ no conjunto $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(t, y) : t = 0\}$. Assim, neste conjunto, f é localmente Lipschitziana em relação a y , o que garante, pelo teorema de Picard-Lindelöf, que numa vizinhança de $t = 1$, existe uma única solução para o problema de valor inicial com $y(1) = 0$ (pois o ponto $(1, 0)$ está em A .)

b) A equação pode ser escrita na forma

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0$$

com

$$M(t, y) = t + ye^{2ty}, \quad N(t, y) = \alpha te^{2ty}.$$

Por definição, a equação é exacta se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} \Leftrightarrow e^{2ty} + 2tye^{2ty} = \alpha(e^{2ty} + 2tye^{2ty}),$$

o que implica que $\alpha = 1$. Neste caso, temos $N(t, y) = te^{2ty}$. Os potenciais para esta equação verificam

$$\begin{aligned} \phi(t, y) &= \int M(t, y) dt = \frac{t^2}{2} + \frac{e^{2ty}}{2} + g(y) \\ \phi(t, y) &= \int N(t, y) dy = \frac{e^{2ty}}{2} + h(t). \end{aligned}$$

Comparando as duas expressões, vemos que os potenciais são da forma

$$\phi(t, y) = \int M(t, y) dt = \frac{t^2}{2} + \frac{e^{2ty}}{2} + C,$$

para uma constante $C \in \mathbb{R}$. Assim, a solução geral da equação na forma implícita é

$$\frac{t^2}{2} + \frac{e^{2ty}}{2} + C = 0.$$

Com $t = 1$, $y = 0$, temos

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -1,$$

Logo, a solução do problema de valor inicial é

$$\frac{t^2}{2} + \frac{e^{2ty}}{2} = 1 \Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{2t} \log(2 - t^2).$$

Esta solução está definida para $t \neq 0$ e $2 - t^2 > 0$. O intervalo de definição (contendo $t = 1$) é portanto, $]0, \sqrt{2}[$.

(3 val.) 7. Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -x + 1 \end{cases}$$

- a) Determine a solução geral do sistema homogêneo associado.
- b) Determine a solução do sistema indicado, que satisfaz a condição $x(0) = y(0) = 0$.

Resolução:

(Primeira alternativa) Tem-se $x'' = 2x' + y'$. Logo $x'' = 2x' + (-x + 1)$ e obtém-se a equação de segunda ordem

$$x'' - 2x' + x = 1. \quad (1)$$

- a) A equação homogênea correspondente é $x'' - 2x' + x = 0$. O polinómio característico é $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$. Logo a solução geral é $x(t) = (a + bt)e^t$, onde a e b são constantes. Como $y = x' - 2x$ tem-se

$$\begin{aligned} y(t) &= (a + bt)e^t + be^t - 2(a + bt)e^t \\ &= be^t - (a + bt)e^t. \end{aligned}$$

Portanto a solução geral do sistema homogêneo é

$$x(t) = ae^t + bte^t \quad (2)$$

$$y(t) = -ae^t + b(1 - t)e^t. \quad (3)$$

- b) Como $x(t) = 1$ é uma solução da equação (1) a solução geral do sistema é

$$x(t) = ae^t + bte^t + 1$$

$$y(t) = -ae^t + b(1 - t)e^t - 2.$$

(Segunda alternativa) A solução matricial obtém-se da seguinte maneira. Começa-se por escrever o sistema na forma matricial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Logo, o sistema homogêneo associado é $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. O polinómio característico da matrix é $p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$. Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. A matriz

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

tem nulidade 1; portanto o subespaço gerado pelos vectores próprios de A tem dimensão 1 e A é semelhante à matriz de Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $(A - I)^2$ é a matriz nula, para determinar um vector próprio generalizado basta encontrar um vector v tal que $(A - I)v \neq 0$. Por exemplo $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Segue-se que

$$(A - I) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

é um vector próprio e a solução geral da equação homogênea associada à equação (4) é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + d \left[t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^t, \quad (5)$$

onde c e d são constantes. Nota-se que para $c = a - b$ e $d = b$, a equação matricial (5) é igual às equações (2) e (3).

Para obter uma solução particular da equação (4) basta determinar uma solução da equação $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Tem-se

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Logo a solução geral é

$$\begin{aligned} x(t) &= ce^t + d(t+1)e^t + 1 \\ y(t) &= -ce^t - dte^t - 2. \end{aligned}$$

Para satisfazer as condições $x(0) = y(0) = 0$ é fácil ver que as constantes terão que ser $c = -2$ e $d = 1$ donde a solução deste problema de Cauchy é

$$\begin{aligned} x(t) &= -e^t + te^t + 1 \\ y(t) &= 2e^t - te^t - 2. \end{aligned}$$

(3 val.) **8.** Considere a seguinte equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 0.$$

- a) Determine uma solução estacionária (que não depende do tempo) $u_e(x)$, desta equação, satisfazendo as condições de fronteira $u_e(0) = 1$, $u_e(\pi/2) = 0$.

- b) Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o problema de valor inicial e fronteira (não estacionário), para a equação dada, com as condições

$$\begin{cases} u(t, 0) = 1 & t > 0, \quad x = 0 \\ u(t, \pi/2) = 0 & t > 0, \quad x = \frac{\pi}{2} \\ u(0, x) = 2 \cos x & t = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(**Sugestão:** Escreva a solução na forma $u = v + u_e$ e resolva o problema para v , utilizando a alínea anterior para estabelecer as novas condições inicial e de fronteira).

Resolução:

- a) Uma solução estacionária verificará a equação diferencial ordinária

$$u_e''(x) + u_e = 0$$

O polinómio característico associado é $R^2 + 1$, que tem como raízes $\pm i$, pelo que a solução geral é

$$u_e(x) = A \cos x + B \sin x$$

Pelas condições de fronteira, conclui-se que $A = 1$ e $B = 0$, e como tal

$$u_e(x) = \cos x.$$

- b) Como sugerido, considere-se

$$u(t, x) = u_e(x) + v(t, x)$$

onde $u_e(x) = \cos x$, determinada em a), e $v(t, x)$ é solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v = 0 \\ v(t, 0) = 0, \quad v(t, \frac{\pi}{2}) = 0 \\ v(0, x) = u(0, x) - u_e(x) = \cos x \end{cases}$$

Para determinar $v(t, x)$, usaremos o método da separação de variáveis, isto é, procura-se soluções não nulas da forma $v(t, x) = T(t)X(x)$. Derivando em ordem a t e a x , substituindo na equação e dividindo por XT , obtém-se

$$\frac{T'(t)}{T(t)} - 1 = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Atendendo a que o primeiro membro é uma função de t , e o segundo é uma função de x , a igualdade só se verificará se existir uma constante λ para a qual

$$\frac{T'(t)}{T(t)} - 1 = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Por outro lado, pelas condições de fronteira $v(t, 0) = v(t, \frac{\pi}{2}) = 0$, e atendendo a que $T(t)$ não pode ser a função identicamente nula, obtém-se $X(0) = X(\frac{\pi}{2}) = 0$. Tem-se então que X é a solução do problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

Para que X não seja identicamente nula, teremos que considerar $\lambda < 0$. Nesse caso

$$X(x) = A \cos(\sqrt{-\lambda}x) + B \sin(\sqrt{-\lambda}x)$$

e para que as condições de fronteira sejam verificadas

$$A = 0 \quad \text{e} \quad B \sin\left(\sqrt{-\lambda}\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Mais uma vez para que $X(x) \not\equiv 0$, há que verificar-se $\lambda = -4n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Sendo assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, obtem-se

$$X_n(x) = B_n \sin(2nx)$$

e a solução da equação diferencial $\frac{T'(t)}{T(t)} = 1 - 4n^2$ é

$$T_n(t) = C_n e^{(1-4n^2)t}$$

Tem-se então, que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$v_n(t, x) = T_n(t)X_n(x) = A_n e^{(1-4n^2)t} \sin(2nx)$$

é solução do problema de valores na fronteira, e atendendo à linearidade da derivada, também qualquer combinação linear o será, pelo que

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{(1-4n^2)t} \sin(2nx)$$

verifica a equação diferencial parcial e as condições de fronteira. Para determinar os coeficientes A_n teremos que utilizar a condição inicial

$$\cos x = v(0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(2nx)$$

pelo que se conclui que as constantes A_n são precisamente os coeficientes do desenvolvimento em série de senos da função $f(x) = \cos x$ no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Visto que f é uma função contínua, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2nx)$$

com

$$b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin(2nx) dx$$

Usando a igualdade $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$, tem-se que (também pode calcular o integral de b_n fazendo duas integrações por partes seguidas, ou ainda escrevendo o seno e cosseno com recurso a exponenciais complexas)

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{2n+1} \cos((2n+1)x) \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2n-1} \cos((2n-1)x) \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{8n}{\pi(4n^2-1)}.$$

Como consequência

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{\pi(4n^2 - 1)} e^{(1-4n^2)t} \sin(2nx)$$

e

$$u(t, x) = u_e(x) + v(t, x) = \cos x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{\pi(4n^2 - 1)} e^{(1-4n^2)t} \sin(2nx).$$

(1,5 val.) 9. Designe por

$$F(s) = \int_0^{\infty} \sqrt{t} e^{-st} dt$$

a transformada de Laplace de $\sqrt{t}$. Usando integração por partes, determine uma equação diferencial ordinária, satisfeita por $F(s)$. Obtenha a solução geral dessa equação e, finalmente, use o facto de que

$$\int_0^{\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

para obter a fórmula explícita da transformada de Laplace de $\sqrt{t}$.

Resolução: O integral que define $F(s)$ existe para $s > 0$ e para estes valores de s tem-se

$$F(s) = \int_0^{\infty} \sqrt{t} e^{-st} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \sqrt{t} e^{-st} dt.$$

Usamos agora a sugestão dada, e integramos por partes este último integral

$$\int_0^R \sqrt{t} e^{-st} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} e^{-st} \Big|_0^R + \frac{2}{3} s \int_0^R t^{\frac{3}{2}} e^{-st} dt.$$

Fazendo o limite $R \rightarrow \infty$, o primeiro termo anula-se e obtemos simplesmente

$$F(s) = \frac{2}{3} s \int_0^{\infty} t \sqrt{t} e^{-st} dt.$$

Finalmente, usamos a propriedade da transformada de Laplace

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}(f(t))(s) = \mathcal{L}(-tf(t))(s)$$

para estabelecer a equação diferencial

$$F(s) = -\frac{2}{3} s \int_0^{\infty} -t \sqrt{t} e^{-st} dt = -\frac{2}{3} s \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} \sqrt{t} e^{-st} dt,$$

ou seja

$$F(s) = -\frac{2}{3} s \frac{dF}{ds}(s), \quad \text{para } s > 0.$$

A solução geral desta simples equação linear homogênea, de primeira ordem, é

$$F(s) = \frac{C}{s^{3/2}}, \quad \text{com } C \in \mathbb{R}$$

e a constante C pode ser determinada, notando que

$$C = F(1) = \int_0^{\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Conclui-se portanto que a transformada de Laplace de $\sqrt{t}$ é dada por

$$\int_0^{\infty} \sqrt{t} e^{-st} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}.$$

(*Outra alternativa*)

É possível também chegar à mesma equação diferencial para $F(s)$, seguindo a outra alternativa de integração por partes. Esta forma é, no entanto, ligeiramente menos directa.

Tal como na resolução acima, integra-se por partes o integral que define a transformada de Laplace de $\sqrt{t}$, só que agora escolhe-se a outra possibilidade de derivadas (sempre para $s > 0$)

$$\int_0^R \sqrt{t} e^{-st} dt = -\frac{\sqrt{t}}{s} e^{-st} \Big|_0^R + \frac{1}{2s} \int_0^R \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}} dt.$$

No limite $R \rightarrow \infty$, o primeiro termo anula-se e obtém-se assim

$$F(s) = \frac{1}{2s} \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}} dt.$$

Para construir a equação diferencial ordinária para $F(s)$ deriva-se esta última fórmula

$$\begin{aligned} \frac{dF}{ds}(s) &= -\frac{1}{2s^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}} dt - \frac{1}{2s} \int_0^{\infty} \frac{te^{-st}}{\sqrt{t}} dt \\ &= -\frac{1}{s} \left(\frac{1}{2s} \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{\sqrt{t}} dt \right) - \frac{1}{2s} \left(\int_0^{\infty} \sqrt{t} e^{-st} dt \right) \\ &= -\frac{1}{s} F(s) - \frac{1}{2s} F(s) \\ &= -\frac{3}{2s} F(s). \end{aligned}$$

E deste modo se chega à equação diferencial, a partir da qual a solução prossegue exactamente como no caso anterior.