Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática IV

2º Semestre 2001/2002

1º Teste - Todos os cursos excepto LEFT, LMAC

4 de Maio de 2002

Duração: 1 hora e 30 minutos
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(3 val.) **1.** Sejam α, $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funções diferenciáveis, e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a função definida por

$$f(x+iy) = \alpha(x) - 3xy^2 + i(3x^2y + \beta(y))$$

para $x, y \in \mathbb{R}$. Decida se pode ou não escolher α, β de modo a que f seja uma função analítica. Em caso afirmativo, determine α, β de maneira a $f(1) = i$.

Resolução:

A função f é analítica em $\mathbb{C}$ se e só se é diferenciável, como aplicação de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^2$, e as suas parte real e imaginária,

$$u(x,y) = \mathrm{Re}(f)(x,y) = \alpha(x) - 3xy^2 \qquad v(x,y) = \mathrm{Im}(f)(x,y) = 3x^2y + \beta(y),$$

satisfazem as equações de Cauchy-Riemann,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{cases}$$

Para que f satisfaça estas equações é necessário, então, que α e β satisfaçam

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \alpha'(x) - 3y^2 = 3x^2 + \beta'(y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

(note que a outra equação de Cauchy-Riemann é sempre satisfeita, independentemente de α e β). Tem-se, portanto, passando todas as funções de x para a esquerda, e as de y para a direita,

$$\alpha'(x) - 3x^2 = 3y^2 + \beta'(y).$$

Agora, uma função que depende apenas de x só pode ser igual a uma outra que depende apenas de y, se ambas forem constantes (visto que como as variáveis x e y podem variar independentemente uma da outra, as duas funções tomariam valores independentes, se não fossem constantes). Conclui-se, então, que

$$\alpha'(x) - 3x^2 = c \quad \text{e} \quad 3y^2 + \beta'(y) = c \quad \text{com} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Primitivando estas duas equações, obtém-se finalmente

$$\alpha(x) = x^3 + cx + k_1 \quad \text{e} \quad \beta(y) = -y^3 + cy + k_2, \quad \text{com} \quad c, k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Estas funções são infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$ o que implica que, substituindo em u e v, resultam funções também infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$, que satisfazem o sistema de Cauchy-Riemann. A resultante função f é, portanto, analítica em todo o $\mathbb{C}$.

Finalmente, de modo a satisfazer a condição $f(1) = i$, basta substituir $(x, y) = (1, 0)$ nas funções obtidas, e determinar as constantes de modo a que $u(1, 0) = 0$ e $v(1, 0) = 1$. Assim,

$$u(1,0) = \alpha(1) = 1 + c + k_1 = 0 \quad \text{e} \quad v(1,0) = \beta(0) = k_2 = 0,$$

donde se conclui que as constantes c e k_1 podem ser escolhidas livremente, satisfazendo apenas a relação

$$c = -1 - k_1.$$

Por exemplo, $c = -2, \ k_1 = 1$.

2. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{-3, 0, 3\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 9} + e^{\frac{1}{z}}.$$

(2 val.) a) Obtenha a série de Laurent de f que é convergente em $|z| > 3$.

(2 val.) b) Classifique a(s) singularidade(s) de f e determine os respectivos resíduos.

Resolução:

a) Se $|z| > 3$, então $3/|z| < 1$ e $9/|z|^2 < 1$. Portanto, tem-se

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2 - 9} + e^{1/z} \\ &= \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{9}{z^2}} + e^{1/z} \\ &= \frac{1}{z^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{z^2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{z^{2n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}, \end{aligned}$$

onde $b_{2k-1} = 1/(2k-1)!$ e $b_{2k} = 3^{2k-2} + 1/(2k)!$ para $k > 0$. Também, tem-se

$$\frac{1}{z^2 - 9} = \frac{1}{z - 3} \cdot \frac{1}{z + 3} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{z - 3} - \frac{1}{z + 3}\right).$$

Logo no aberto $U = \{z : |z| > 3\}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2-9} &= \frac{1}{z-3}\cdot\frac{1}{z+3}\\
&= \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-3/z}\cdot\frac{1}{1+3/z}\\
&= \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{z}\right)^n\\
&= \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k}{z^k}\cdot(-1)^{n-k}\frac{3^{n-k}}{z^{n-k}}\right)\\
&= \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^n}{z^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\right)\\
&= \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n}}{z^{2n}}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n}}{z^{2n+2}}
\end{aligned}$$

ou tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2-9} &= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z+3}\right)\\
&= \frac{1}{6z}\left(\frac{1}{1-3/z}-\frac{1}{1+3/z}\right)\\
&= \frac{1}{6z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{z^n}\right)\\
&= \frac{1}{6z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3^n}{z^n}-(-1)^n\frac{3^n}{z^n}\right)\\
&= \frac{1}{6z}\sum_{n=0}^{\infty}2\frac{3^{2n+1}}{z^{2n+1}}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n}}{z^{2n+2}}
\end{aligned}$$

b) As singularidades de f são nos pontos $z = 0, 3$ e -3. No plano complexo excepto a origem a função $e^{1/z}$ é holomorfa e a função $g(z) = z^2 - 9 = (z-3)(z+3)$ tem zeros de ordem 1 nos pontos $z = 3$ e -3. Logo as singularidades de f nos pontos $z = 3$ e -3 são *simples* ou seja de ordem 1. Em $V = \{z : 0 < |z| < 3\}$ a função $g(z) \neq 0$. Segue-se que $1/g(z)$ é holomorfa em V e a série de Laurent de f em V tem a forma

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n.$$

Portanto a singularidade na origem é *essencial*.

O resíduo no ponto $z = 3$ é

$$\operatorname*{Res}_{z=3} f = \lim_{z\to 3}(z-3)f(z) = \lim_{z\to 3}(z-3)\left(\frac{1}{(z-3)(z+3)}+e^{\frac{1}{z}}\right) = \frac{1}{6}$$

O resíduo no ponto $z=-3$ é

$$\operatorname*{Res}_{z=3} f = \lim_{z\to -3}(z+3)f(z) = \lim_{z\to -3}(z+3)\left(\frac{1}{(z-3)(z+3)} + e^{\frac{1}{z}}\right) = -\frac{1}{6}$$

Para determinar o resíduo na origem pode-se utilizar a alínea a) na forma seguinte. Os coeficientes da série de Laurent de $f(z)$ no aberto U são

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$$

onde $\gamma(t) = Re^{it}$ com $R > 3$ e $0 \le t \le 2\pi$ e $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$. Para $n = -1$ tem-se

$$\begin{aligned}
1 &= c_1 \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz \\
&= \operatorname*{Res}_{z=0} f + \operatorname*{Res}_{z=3} f + \operatorname*{Res}_{z=-3} f \\
&= \operatorname*{Res}_{z=0} f + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \\
&= \operatorname*{Res}_{z=0} f.
\end{aligned}$$

3. Considere a função $f : \mathbb{C}\setminus\{-i, i\} \to \mathbb{C}$, definida por

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$$

(2 val.) a) Determine

$$\oint_{C_R} f(z)\, dz$$

em que $R > 1$ e

$$C_R = \{z = x \ : \ x \in [-R, R]\} \cup \{z = Re^{i\theta} \ : \ \theta \in [0, \pi]\}$$

percorrida uma vez no sentido directo.

(2 val.) b) Obtenha um majorante para $|\int_{\gamma_R} f(z)\, dz|$ em que

$$\gamma_R = \{z = Re^{i\theta} \ : \ \theta \in [0, \pi]\}$$

(2 val.) c) Aproveite as alíneas anteriores, para calcular o integral real

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}dx$$

Resolução:

a) Como f é o quociente de duas funções inteiras, as singularidades de $f(z)$ são os pontos onde o denominador se anula, isto é

$$z^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm i.$$

Dado que C_R é uma curva simples e fechada (percorrida no sentido directo) e só a singularidade $z = i$ se encontra no seu interior, temos pelo teorema dos resíduos

$$\oint_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \text{Res}(f, i).$$

Finalmente, como

$$\lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{e^{iz}}{z+i} = \frac{e^{-1}}{2i}$$

é um número complexo não nulo, podemos concluir que $z = i$ é um polo simples e que $\text{Res}(f,i) = \frac{1}{2ie}$. Assim

$$\oint_{C_R} f(z)dz = \frac{\pi}{e}.$$

b) Como $\gamma_R(t) = Re^{it}$ e $\gamma_R'(t) = iRe^{it}$, para $t \in [0,\pi]$ temos, pela definição,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| &= \left|\int_0^\pi f(Re^{it})iRe^{it}dt\right| \\
&\leq \int_0^\pi \left|\frac{e^{iRe^{it}}iRe^{it}}{\left(Re^{it}\right)^2+1}\right|dt \\
&= \int_0^\pi \frac{e^{-R\text{sen}t}R}{|R^2e^{2it}+1|}dt \\
&\leq \int_0^\pi \frac{R}{R^2-1}dt = \frac{R\pi}{R^2-1},
\end{aligned}$$

onde se usam as desigualdades $\left|R^2e^{2it}+1\right| \geq R^2-1$ e $\text{sen}t \geq 0$, para $t \in [0,\pi]$ e $R > 1$.

c) Pela primeira alínea, e decompondo C_R em dois caminhos,

$$\frac{\pi}{e} = \oint_{C_R} f(z)dz = \int_{-R}^R f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz.$$

Fazendo o limite quando $R \to \infty$, de ambos os membros da equação anterior, obtemos, pela alínea b)

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{e} &= \int_{-\infty}^\infty f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x^2+1}dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x + i\text{sen}x}{x^2+1}dx \\
&= \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}dx + i\int_{-\infty}^\infty \frac{\text{sen}x}{x^2+1}dx.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\pi}{e} = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}dx, \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{\text{sen}x}{x^2+1}dx = 0,$$

e dado que $\frac{\cos x}{x^2+1}$ é uma função par (note-se também que é integrável), conclui-se que

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2e}.$$

(4 val.) **4.** Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t^2+1}{y^2t^2} \\[2em] y(1) = 1 \end{cases}$$

indicando o intervalo máximo de definição da sua solução

Resolução:

Trata-se de uma equação separável, pelo que, para $y(t) \neq 0$, tem-se que

$$y^2\dot{y} = \frac{t^2+1}{t^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big(\int y^2 dy\Big) = 1 + \frac{1}{t^2}$$

Efectuando as integrações, obtem-se a solução na forma implícita

$$\frac{y^3}{3} = t - \frac{1}{t} + C$$

e resolvendo em ordem a y

$$y(t) = \sqrt[3]{3t - \frac{3}{t} + 3C}$$

Pela condição inicial $y(1) = 1$, conclui-se que $3C = 1$, e a solução do problema de valor inicial é dada por

$$y(t) = \sqrt[3]{3t - \frac{3}{t} + 1}$$

definida para $t \in I$, em que $I \subset \mathbb{R}$ é o maior intervalo verificando o seguinte:

$1 \in I$,

domínio de y contem I, e

$y(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Como o domínio de y é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $y(t) = 0$ para $t = \frac{-1\pm\sqrt{37}}{6}$, o intervalo máximo de definição da solução é $I =]\frac{-1+\sqrt{37}}{6}, +\infty[$.

(3 val.) **5.** Sejam $g,\ h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funções inteiras, verificando $g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$, $h(a) = h'(a) = 0$ e $h''(a) \neq 0$, para certo $a \in \mathbb{C}$. Mostre que

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{2g'(a)}{h''(a)}$$

em que f é a função definida por $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$.

Resolução:

Como g e h são funções inteiras, ambas têm desenvolvimento em série de Taylor centrada em qualquer ponto, com raio de convergência infinito. Em particular, em torno do ponto $z_0 = a$ tem-se

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = g(a) + g'(a)(z-a) + \frac{g''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots$$

e

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = h(a) + h'(a)(z-a) + \frac{h''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots,$$

válidas para todo o $z \in \mathbb{C}$.

Usando agora as hipóteses indicadas, que $g(a) = 0$ e que $h(a) = h'(a) = 0$, podemos simplificar as séries acima,

$$g(z) = g'(a)(z-a) + \frac{g''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots = (z-a)\left[g'(a) + \frac{g''(a)}{2!}(z-a) + \cdots\right]$$

e

$$h(z) = \frac{h''(a)}{2!}(z-a)^2 + \frac{h'''(a)}{3!}(z-a)^3 + \cdots = (z-a)^2\left[\frac{h''(a)}{2!} + \frac{h'''(a)}{3!}(z-a) + \cdots\right].$$

Escrevendo

$$\phi(z) = g'(a) + \frac{g''(a)}{2!}(z-a) + \cdots\,,$$

$$\psi(z) = \frac{h''(a)}{2!} + \frac{h'''(a)}{3!}(z-a) + \cdots\,,$$

tem-se então,

$$g(z) = (z-a)\phi(z) \qquad \text{e} \qquad h(z) = (z-a)^2\psi(z),$$

com

$$\phi(a) = g'(a) \neq 0 \qquad \text{e} \qquad \psi(a) = \frac{h''(a)}{2!} \neq 0.$$

A função f pode, portanto, ser escrita como

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{(z-a)\phi(z)}{(z-a)^2\psi(z)} = \frac{\phi(z)}{(z-a)\psi(z)}.$$

Visto que as funções ϕ e ψ não se anulam em a, escrita nesta forma é agora evidente que a função f tem aí um pólo simples (isto é, de ordem 1), com resíduo dado por

$$\operatorname{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a}\frac{\phi(z)}{\psi(z)} = \frac{\phi(a)}{\psi(a)} = \frac{2\,g'(a)}{h''(a)}.$$