# Análise Matemática I

1º Exame - 20 de Janeiro de 99

Ele., Eng. Bio., Eng. Quí., Ges. e Quí.

**Soluções**

**1.**

**a)** $S$ é a união do conjunto de pontos cuja distância a 1 é inferior a 2 com o conjunto de pontos cuja distância a 3 é igual ou superior à sua distância a 4. Ou seja, $S = ]-1, 3[ \cup [3.5, +\infty[$.


$S$.

**b)** $\inf S = -1$; o $\min S$, $\max S$ e $\sup S$ não existem.

**c)**
- $x_n = 0$;
- $x_n = -1 + \frac{1}{n}$;
- $x_n = 1 + (-1)^n$;
- $x_n = n + 3$;
- $x_1 = 5$, $x_n = n + 2$ se $n \geq 2$. *Outro exemplo:* $x_n = (-1)^{n+1} + n + 3$.

**2.**

**a)** $s_1 = \sum_{k=1}^{1}(a_{k+2} - a_k) = a_3 - a_1 = -a_1 - a_2 + a_2 + a_3$. Suponhamos que

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+2} - a_k) = -a_1 - a_2 + a_{n+1} + a_{n+2};$$

então $s_{n+1} = s_n + (a_{n+3} - a_{n+1}) = -a_1 - a_2 + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+1} = -a_1 - a_2 + a_{n+2} + a_{n+3} = -a_1 - a_2 + a_{(n+1)+1} + a_{(n+1)+2}$.

**b)** $\lim s_n = -a_1 - a_2 + 2a$.

**c)** Se $a_n = (-1)^n$, então $s_n = 0$ para todo o $n$.

**3.**

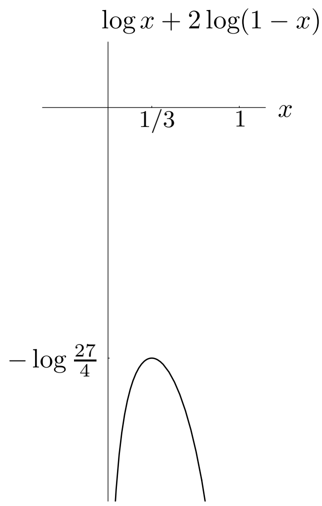
**a)** $\lim e^{\frac{1}{n}} = 1$. A série é divergente pois o limite do seu termo geral não é zero.

**b)** Trata-se de uma série geométrica de razão maior que $-1$ e menor do que 1. Logo, a série é convergente e a sua soma é $\frac{1}{e}\frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}$.

**c)** $\sqrt[n]{\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} + \frac{1}{n} \to \frac{1}{e} < 1$. Pelo critério de Cauchy, a série é convergente.

**d)** A sucessão $(e^n)$ é crescente, pelo que a sucessão $(e^{-e^n})$ é decrescente. Pelo critério de Leibnitz, a série é convergente.
Examinemos agora a série "dos módulos," $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-e^n}$. Como $e^n = 1 + n + \frac{n^2}{2!} + \ldots > n$, $e^{-e^n} < e^{-n}$. Do estudo feito na alínea **b)**, esta série é convergente. Conclui-se que a série é absolutamente convergente.

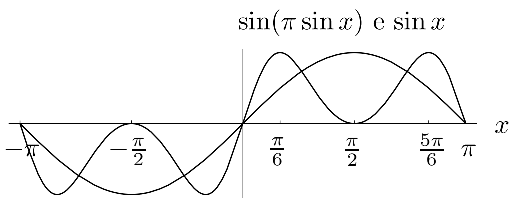
**4.** $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$.
$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{1-x} = \frac{1-3x}{x(1-x)}$.
$f'(x) > 0$ se $0 < x < \frac{1}{3}$, $f'(\frac{1}{3}) = 0$ e $f'(x) < 0$ se $\frac{1}{3} < x < 1$.
$f(\frac{1}{3}) = \log\frac{4}{27}$.
$f''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{(1-x)^2} < 0$.




O gráfico de $f$.

**5.**

**a)** $f(\frac{\pi}{6}) = \sin(\pi\sin\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 > \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.
$f(\frac{\pi}{2}) = \sin(\pi\sin\frac{\pi}{2}) = \sin\pi = 0 < \sin\frac{\pi}{2} = 1$.
$f'(x) = \cos(\pi\sin x) \times \pi\cos x$.
Se $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos x \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$, $\sin x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $\pi\sin x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\cos(\pi\sin x) \in [-1, 0]$. Logo, $f'(x) \leq 0$, sendo a desigualdade estrita se $x \neq \frac{\pi}{6}$ e $x \neq \frac{\pi}{2}$. Por outro lado, a função seno é estritamente crescente no intervalo $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$. Aplicando o Teorema do Valor Intermédio à função $f(x) - \sin x$ no intervalo $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$, e usando o facto desta diferença ser estritamente decrescente neste interval, conclui-se que a equação $f(x) = \sin x$ tem exactamente uma solução em $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$.




O gráfico de $f$ e da função seno.

**b)** $f$ é periódica, $f(x) = f(x + 2k\pi)$ para $k$ inteiro, e de classe $C^\infty$.
Derivando sucessivamente a igualdade da linha acima, $f^{(n)}(x) = f^{(n)}(x+$

$2k\pi$) para todo o natural $n$.
Seja $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema de Weierstrass, $f^{(n)}$ tem máximo e mínimo em $[0, 2\pi]$. Pela periodicidade, esses valores coincidem com o máximo e mínimo em $\mathbb{R}$.