Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA I

(LEIC - polo da Alameda)

Data: 17/1/2002. **Hora:** 9h00.
Duração: 3h00.

I.

Considere os conjuntos definidos por

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - |x|}{x-3} \leq 0 \right\}, \qquad B = \{x \in [-1,1] : \arcsin x \geq 0\}$$

1. Identifique o conjunto B, e mostre que $A =]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, 3[$.

2. Determine, se existirem em $\mathbb{R}$:

$$\inf A, \qquad \max A, \qquad \sup A \cap B, \qquad \min A \cap B, \qquad \max(B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})).$$

3. Diga, justificando, quais das seguintes proposições são verdadeiras. Para as que forem falsas forneça um contra-exemplo.

   a) Toda a sucessão monótona de termos em A é convergente em $\mathbb{R}$.

   b) Toda a sucessão crescente de termos em A é convergente em $\mathbb{R}$.

   c) Se $x_n = (-1)^n a_n$, onde a_n é uma sucessão de termos em $A \cap \mathbb{R}^+$, então x_n tem, pelo menos, dois sublimites, s_1 e s_2, tais que $s_1 < 0$ e $s_2 > 0$.

   d) Para qualquer função contínua com domínio A, existe $\sup f(A \cap \mathbb{R}^+)$.

II.

Determine a natureza (absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente) das séries seguintes. Indique o valor das duas primeiras somas.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{-n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\pi}{n}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n n!}{n^n}.$$

III.

1. Calcule os dois limites e as duas derivadas seguintes:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2x - \pi}{\cos x}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}, \qquad \frac{d}{dx} e^{e^x}, \qquad \frac{d}{dx} \arctan(\ln x) \quad .$$

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável. Mostre que, se a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fôr dada por $\varphi(x) = f(\arctan x)$, então:

$$4\varphi''(1) = f''(\frac{\pi}{4}) - 2f'(\frac{\pi}{4}) \quad .$$

IV.

Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^x, & \text{se } x \leq 0 \\ \arctan \dfrac{1}{x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

a) Estude a continuidade de f em todo o seu domínio e calcule

$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x)\,.$$

b) Diga, justificando, qual é o domínio de diferenciabilidade de f e calcule f'.

c) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de f.

d) Determine, o contradomínio de f. Justifique detalhadamente a sua resposta.

V.

Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$\forall_{x \in [-1,1]} \; |f(x)| \leq x^2(1 - x^2)\,.$$

a) Mostre que f é diferenciável em $x = 0$ e diga o valor de $f'(0)$.

b) Suponha, adicionalmente, que f é contínua em $[-1, 1]$ e é três vezes diferenciável em $]-1, 1[$. Mostre que existe $c \in]-1, 1[$ tal que

$$f'''(c) = 0\,.$$