Análise Harmónica

2º Semestre 2019/2020

5ª Série de Problemas

Para entregar até ao dia 7 de Junho

---

1. Considere uma função par $f \in L^1(\mathbb{T})$, com coeficientes de Fourier convexos para $n \geq 0$.

a) Mostre que se tem a fórmula

$$S_N f(t) = \sum_{n=1}^{N-1} n\, \Delta^2 \hat{f}_n\, K_{n-1}(t) + N\, \Delta \hat{f}_N\, K_{N-1}(t) + \hat{f}(N)\, D_N(t),$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta^2 \hat{f}_n &= \hat{f}(n-1) - 2\hat{f}(n) + \hat{f}(n+1), \\ \Delta \hat{f}_n &= \hat{f}(n-1) - \hat{f}(n), \end{aligned}$$

e $K_N(t), D_N(t)$ designam, respectivamente, os núcleos de Fejér e Dirichlet.

b) Use a alínea anterior para concluír que uma função f nas condições dadas tem série de Fourier convergente para ela própria, na norma $L^1(\mathbb{T})$, se e só se $\lim_n \hat{f}(n) \log(n) = 0$.

2. Prove que toda a função analítica em $D = \{z :\in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ tal que $\mathrm{Re} f(z) \geq 0$ e tal que $f(0) > 0$ é da forma

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t),$$

em que $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ é uma medida de Borel positiva em $\mathbb{T}$.

3. Prove que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ se e só se $\sum_{-\infty}^{+\infty} 2^{kp} \lambda_f(2^k) < \infty$, em que λ_f é a função de distribuição de f.

4. Mostre que, se $f \in L^p_w(\mathbb{R}^n)$ e se $|\{x : f(x) \neq 0\}| < \infty$, então $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$, para todo o $q < p$. Mostre também que, para todo o $q > p$ se tem $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ se for $f \in L^p_w(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

5. a) Por vezes é conveniente considerar ligeiras variações da função maximal de Hardy-Littlewood, em que as bolas não são centradas no ponto x. Considere, assim, a seguinte função maximal, definida para funções $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$:

$$\tilde{M} f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|\, dy,$$

com valores em $[0, +\infty]$, e em que o supremo é tomado sobre todas as bolas que contêm x, e não apenas nas que são centradas em x, como na função maximal standard. Mostre que existem constantes A e B, maiores que zero, tais que

$$\forall_x \quad A\, Mf(x) \leq \tilde{M} f(x) \leq B\, Mf(x),$$

onde $Mf(x)$ designa a função maximal de Hardy-Littlewood standard, dada na aula.

b) Prove que a função maximal de Hardy-Littlewood (dada na aula, com bolas centradas) é semi-contínua inferior, isto é, que o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \alpha\}$ é aberto, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, concluíndo assim também que a função maximal é mensurável.

c) Provámos na aula que, para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se tem $Mf \in L^1_w(\mathbb{R}^n)$. Na verdade, aparte do caso $f = 0$, $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Prove este facto.

6. Este problema permite-nos estabelecer o limite pontual de funções harmónicas $u \in h^1(D)$, quando $r \to 1^-$, que já sabemos serem convoluções de medidas em $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ com o núcleo de Poisson.

a) Seja $\mu_s \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ uma medida singular, relativamente à medida de Lebesgue em $\mathbb{T}$. Mostre que para quase todo o $\theta \in \mathbb{T}$ (relativamente à medida de Lebesgue), se tem

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu_s([\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon])}{2\varepsilon} = 0.$$

b) Mostre que para qualquer $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ se tem

$$\lim_{r \to 1^-} P_r * \mu\,(\theta) = f(\theta), \qquad \text{q.t.p.} \quad \theta \in \mathbb{T},$$

em que P_r é o núcleo de Poisson e $\mu = \mu_{ac} + \mu_s$, com μ_{ac} e μ_s medidas, respectivamente, absolutamente contínua e singular relativamente à medida de Lebesgue em $\mathbb{T}$, $d\mu_{ac} = \frac{1}{2\pi} f d\theta$, $f \in L^1(\mathbb{T})$, é a decomposição de Lebesgue-Radon-Nikodym de μ.