Análise Harmónica
2º Semestre 2019/2020

4ª Série de Problemas

Para entregar até ao dia 24 de Maio

---

1. Foi visto na Aula 17, Teorema 1.8, que, se o decaimento dos coeficientes de Fourier de f for $O(|n|^{-(k+1+\epsilon)})$, então $f \in C^k(\mathbb{T})$. Este novo problema permite mostrar que se consegue um pouco mais, se se utilizarem estimativas L^2. Assim, seja $f \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $\hat{f}(n) = O(|n|^{-m})$. Mostre que, se $m > k + 1/2$, com $k \geq 1$, então f é k vezes diferenciável q.t.p. em $\mathbb{T}$, com $\frac{d^k f}{dx^k} \in L^2(\mathbb{T})$.

2. Seja $0 < \alpha < 1$. Prove que a função f_α definida por

$$f_\alpha(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3^n t)}{3^{n\alpha}}$$

é Hölder-α contínua. Isto é, mostre que $f_\alpha \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$. Este exemplo, mencionado na Aula 17, mostra que o resultado $\hat{f}(n) = O(|n|^{-\alpha})$, relativo ao decaimento de funções Hölder-α, não pode ser melhorado. Sugestão: Utilize a fórmula trigonométrica

$$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

e separe a série em duas somas, que possam ser estimadas separadamente de forma adequada.

3. a) Seja $\{f_n\}$ uma sucessão na álgebra de Wiener, tal que $||f_n||_{\mathbb{A}(\mathbb{T})} \leq 1$. Assumindo que f_n converge uniformemente para f, em $\mathbb{T}$, mostre que $f \in A(\mathbb{T})$ e que $||f||_{\mathbb{A}(\mathbb{T})} \leq 1$.

b) Mostre que as condições da alínea anterior não são suficientes para garantir que $||f_n - f||_{\mathbb{A}(\mathbb{T})} \to 0$. Mas que, se acrescentar a condição $||f_n||_{\mathbb{A}(\mathbb{T})} \to ||f||_{\mathbb{A}(\mathbb{T})}$, então de facto tem-se a convergência de f_n para f, na norma da álgebra de Wiener.

4. Prove que se $f \in L^1(\mathbb{T})$ é tal que existe um $1 \leq p \leq 2$ para o qual $\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^p < \infty$, então $f \in L^q(\mathbb{T})$, com $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, e tem-se

$$||f||_{L^q(\mathbb{T})} \leq \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

5. Seja $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ tal que $|\hat{f}(n)| \leq K|n|^{-1}$, para algum $K > 0$ e $n \neq 0$.

a) Mostre que, para todo o $t \in \mathbb{T}$ e $N \in \mathbb{N}$, se tem $|S_N[f](t)| \leq ||f||_\infty + 2K$.
Sug: Note que $S_N[f](t) = \sigma_N(f)(t) + \sum_{n=-N}^{N} \frac{|n|}{N+1} \hat{f}(n) e^{int}$.

b) Utilizando o resultado da alínea anterior, com a função $f(t) = t/2$, $t \in]-\pi, \pi]$, prove que

$$\forall_{N \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{T}} \qquad \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{\operatorname{sen}(nt)}{n} \right| \leq \frac{\pi}{2} + 1.$$

6. Este problema permite mostrar que os testes de convergência pontual de séries de Fourier vistos na aula (funções BV e Dini) são independentes.

a) Use a função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \Big[\log(|x|/2\pi)\Big]^{-1}$, com $f(0) = 0$, para mostrar que há funções $BV(\mathbb{T})$, portanto com séries de Fourier convergentes em todos os pontos, e em que no entanto o teste de Dini falha nalgum ponto.

b) Dê um exemplo da independência contrária, em particular duma função contínua para a qual o teste de Dini funcione num ponto mas que não seja BV em qualquer vizinhança desse ponto.

c) Demonstre o seguinte critério de convergência (que se pode mostrar ser mais abrangente do que o de Dini ou o de funções $BV(\mathbb{T})$, incluindo-os a ambos como casos particulares). Seja $f \in L^1(\mathbb{T})$ e defina a função $\chi : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ por:

$$\chi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \left(\frac{f(x+s) + f(x-s)}{2} - c \right) ds, \text{ para } t > 0, \qquad \chi(0) = 0.$$

Então, se (i) $\chi(t) \to 0$ quando $t \to 0$ e se (ii) χ for $BV[0, \delta]$, para algum $\delta > 0$, a série de Fourier de f, em x, converge para c.