Análise Harmónica

2º Semestre 2019/2020

3ª Série de Problemas

Para entregar até ao dia 3 de Maio

---

1. Este problema generaliza o princípio da fase não estacionária em integrais oscilatórios, do qual o Lema de Riemann-Lebesgue para a transformada de Fourier é o exemplo paradigmático. Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ uma função complexa, e $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ uma função real tal que $\nabla\phi(x) \neq 0$ em todos os pontos $x \in \mathbb{R}^n$ (esta função é normalmente chamada de *fase*). Mostre que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)} f(x)\, dx = 0.$$

2. Seja $f \in L^1(\mathbb{T})$, $m \in \mathbb{N}_1$ e defina-se $f_{(m)}(t) = f(mt)$, para todo o $t \in \mathbb{T}$. Mostre que se verifica, para todo o $n \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{f_{(m)}}(n) = \begin{cases} \hat{f}\left(\frac{n}{m}\right) & \text{se} \quad m \mid n \\ 0 & \text{se} \quad m \nmid n \end{cases}$$

3. Considere o polinómio trigonométrico de grau N e coeficientes ± 1:

$$P_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} \pm\, e^{int}.$$

Prove que se têm as seguintes estimativas das normas $L^p(\mathbb{T})$, dadas em termos do grau N do polinómio.

a) Se $1 \leq p \leq 2$ então $(2N+1)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|P_N\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \sqrt{2N+1}$.

b) Se $2 \leq p \leq \infty$ então $\sqrt{2N+1} \leq \|P_N\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq 2N+1$.

c) Mostre que as normas L^1 do núcleo de Dirichlet - as chamadas constantes de Lebesgue - satisfazem

$$L_N = \|D_N\|_{L^1(\mathbb{T})} = \frac{4}{\pi^2}\log N + O(1),$$

e que, portanto, o núcleo de Dirichlet não é uma aproximação da identidade (Lembre-se que a notação $O(1)$ indica um termo limitado).

4. Este problema permite concluir que as séries de Fourier de funções de classe $C^1(\mathbb{T})$ convergem absoluta e uniformemente para f. Seja f uma função absolutamente contínua em $\mathbb{T}$ (lembre-se, de teoria de medida, que isso garante que f' existe q.t.p. em $\mathbb{T}$) e tal que $f' \in L^2(\mathbb{T})$. Mostre que, com estas hipóteses, a série de Fourier de f é absolutamente convergente para qualquer $t \in \mathbb{T}$, e tem-se

$$||\hat{f}||_{l^1} = \sum_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| \leq ||f||_{L^1(\mathbb{T})} + \left(2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} ||f'||_{L^2(\mathbb{T})}.$$

5. Considere para este exercício $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

a) Seja $f \in C(\mathbb{T})$ uma função contínua e periódica, de período 1, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ um número irracional e $t_0 \in \mathbb{T}$ um ponto qualquer fixo. Mostre que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(t_0 + n\,\alpha) = \int_{\mathbb{T}} f(t)\,dt.$$

Sugestão: Comece por verificar a igualdade para as funções $e^{2\pi i k t}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

b) Mostre que se $\alpha \in \mathbb{Q}$ o resultado não se verifica.

c) Seja $[a,b] \in \mathbb{T}$ e escreva-se $t_n = t_0 + n\,\alpha$. Mostre que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#\{1 \leq n \leq N : a \leq t_n \leq b\} = b - a,$$

o que pode ser descrito por palavras como “no limite, a fracção dos termos da sucessão t_n que caem dentro do arco $[a,b]$ é igual ao comprimento desse arco”.

6. Este problema estabelece o chamado Lema de Fejér. Sejam $f \in L^1(\mathbb{T})$ e $g \in L^\infty(\mathbb{T})$. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)\,g(nt)\,dt = \hat{f}(0)\,\hat{g}(0).$$

Sugestão: Aproxime f por polinómios trigonométricos.