Análise Harmónica

2º Semestre 2019/2020

2ª Série de Problemas

Para entregar até ao dia 17 de Abril

---

1. Para $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ fixo, com $1 \leq p \leq \infty$, considere o operador linear $T_g : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ definido por

$$T_g f = g * f, \qquad f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Mostre que, para $1 \leq p < \infty$, a norma do operador T_g, $\|T_g\|_{L^1 \to L^p}$, é exactamente igual a $\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Qual é a norma do operador para $p = \infty$?

2. Sejam (X, μ) e (Y, ν) espaços de medida σ-finitos, e $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ uma função mensurável. Define-se a norma mista $L^p_x L^q_y$ de f como

$$\|f\|_{L^p(X, L^q(Y))} = \Big\| \|f(x,y)\|_{L^q(Y)} \Big\|_{L^p(X)},$$

e, analogamente, a norma $L^q_y L^p_x$

$$\|f\|_{L^q(Y, L^p(X))} = \Big\| \|f(x,y)\|_{L^p(X)} \Big\|_{L^q(Y)},$$

para quaisquer $0 < p, q \leq \infty$. A ordem pela qual se calculam as normas parciais é muito importante, porque não é comutativa. Mostre, no entanto, que para $0 < p \leq q \leq \infty$, a seguinte desigualdade é válida

$$\|f\|_{L^q(Y, L^p(X))} \leq \|f\|_{L^p(X, L^q(Y))}.$$

3. No mesmo contexto do problema anterior, considere o operador integral

$$Kf(x) = \int K(x,y) f(y) dy,$$

em que o núcleo $K(x,y)$ satisfaz $\|K\|_{L^q(Y, L^p(X))}, \|K\|_{L^q(X, L^p(Y))} < \infty$, para algum par de expoentes $1 \leq p, q \leq \infty$. Mostre que, para s entre os expoentes conjugados p' e q', $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{r}$ e $f \in L^s(Y)$, então $Kf(x)$ está bem definida q.t.p. $x \in X$, $Kf \in L^r(X)$ e é válida a desigualdade

$$\|Kf\|_r \leq \|K\|^{\theta}_{L^q(Y, L^p(X))} \|K\|^{1-\theta}_{L^q(X, L^p(Y))} \|f\|_s,$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ é tal que $\dfrac{1}{s} = \theta \dfrac{1}{q'} + (1-\theta) \dfrac{1}{p'}$.

<u>*Obs:*</u> O caso $p = 1, q = \infty$ corresponde à desigualdade de Schur-Young. O caso $p = q = 2$ é também muito importante: neste caso $K \in L^2(Y, L^2(X)) = L^2(X, L^2(Y)) = L^2(X \times Y)$ é denominado de núcleo de Hilbert-Schmidt e a correspondente fórmula integral define um operador linear contínuo de L^2 para L^2, conhecido também como operador Hilbert-Schmidt.

4. Considere funções $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $g \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$.

a) Prove rigorosamente que $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e que $\forall_{|\alpha|\leq k}\ \partial^\alpha(f * g) = f * \partial^\alpha g$.

b) Se se tiver também $f \in C^l(\mathbb{R}^n)$ (mantendo a condição $g \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$), mostre que então $f * g \in C^{k+l}(\mathbb{R}^n)$ e que $\partial^\alpha(f * g) = \partial^{\alpha_1} f * \partial^{\alpha_2} g$, com $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $|\alpha_1| \leq l$ e $|\alpha_2| \leq k$.

<u>*Obs:*</u> α, α_1 e α_2 são multi-índices.

5. Seja $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, com $\int \varphi = 1$ e $\operatorname{supp} \varphi \subset B_1(0)$. Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (o que, do problema anterior, sabemos já que implica que $\varphi_\epsilon * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$), prove que, quando $\epsilon \to 0$, então $\varphi_\epsilon * f \to f$ uniformemente em subconjuntos compactos de abertos onde f é contínua. Mostre além disso que, no caso de f ser k vezes continuamente diferenciável nesse aberto, todas as derivadas $\partial^\alpha \varphi_\epsilon * f$, com $|\alpha| \leq k$, convergem também uniformemente para $\partial^\alpha f$, em subconjuntos compactos do aberto. Recorde que $\varphi_\epsilon(x) = 1/\epsilon^n \varphi(x/\epsilon)$.

6. Este problema mostra que, em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, a continuidade da translação verifica-se se e só se f é uniformemente contínua (a implicação "se" é consequência simples da definição de continuidade uniforme e temo-la usado frequentemente nas últimas aulas). Seja $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_{h\to 0} ||f(\cdot - h) - f(\cdot)||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = 0$. Prove que, neste caso, f é q.t.p. igual a uma função uniformemente contínua (ou, de forma mais precisa, existe um representante na classe de equivalência de funções iguais q.t.p. a $f \in L^\infty$ que é uniformemente contínua). Sugestão: Defina as médias de f em bolas de raio r centradas em x como

$$A_r f(x) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(y)\, dy,$$

e, reconhecendo nesta fórmula uma convolução de f com uma aproximação da identidade, use-a para aproximar f e chegar à conclusão desejada.