Análise Harmónica

2º Semestre 2019/2020

1ª Série de Problemas

Para entregar na aula do dia 18 de Março

1. Enuncie e prove uma versão da desigualdade de Hölder quando um dos índices L^p satisfaz $0 < p < 1$.

2. Encontre as condições necessárias e suficientes para a desigualdade de Minkowski

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p,$$

ser uma igualdade, com $1 \leq p < \infty$. *Obs.* Os casos $p = 1$ e $1 < p < \infty$ são distintos.

3. Seja $f \in L^p(X)$, para algum $0 < p < \infty$. Prove que, nesse caso,

$$\lim_{q \to \infty} ||f||_q = ||f||_\infty,$$

incluindo a situação em que o lado direito é infinito.

4. Seja (X, μ) um espaço de medida finita tal que $\mu(X) = 1$ e considere $f \in L^p(X)$ para algum $p > 0$ (o que sabemos que implica que $f \in L^q(X)$, para todo o q satisfazendo $0 < q \leq p$). Os exercícios que se seguem permitem obter o limite da norma $||f||_q$, quando $q \to 0$. Considere que $\log 0 = -\infty$ e que $e^{-\infty} = 0$.

a) Mostre que $\log ||f||_q \geq \int \log |f| d\mu$.

b) Mostre que $\frac{\int |f|^q d\mu - 1}{q} \geq \log ||f||_q$ e que $\lim_{q \to 0} \frac{\int |f|^q d\mu - 1}{q} = \int \log |f| d\mu$.

c) Conclua que $\lim_{q \to 0} ||f||_q = e^{\int \log |f| d\mu}$ (média geométrica da função $|f|$).

5. Sejam $0 < p < q < \infty$. Mostre que, então, $L^p(X) \not\subset L^q(X)$ se e só se X contém subconjuntos de medida arbitrariamente pequena e positiva. Analogamente, mostre que $L^p(X) \not\supset L^q(X)$ se e só se X contém subconjuntos de medida arbitrariamente grande e finita. Sugestão: Considere $f = \sum_n a_n \chi_{E_n}$, para constantes a_n apropriadas, em que E_n é uma sucessão de conjuntos disjuntos satisfazendo $0 < \mu(E_n) \leq 2^{-n}$, no primeiro caso, e $1 \leq \mu(E_n) < \infty$, no segundo. E no caso $q = \infty$?

Dado um espaço normado X e uma sucessão $\{f_j\}$ em X, dizemos que a sucessão converge fortemente, ou na norma X, para $f \in X$, se $\lim_{j \to \infty} \|f_j - f\|_X = 0$. Esta é a convergência "habitual", representada por $f_j \to f$. No entanto, a topologia fraca definida em X por todos os funcionais em X' também define uma forma muito importante de convergência de sucessões: a chamada convergência fraca. Nesse caso, que se representa por $f_j \rightharpoonup f$, a sucessão $\{f_j\}$ converge fracamente para f se e só se $\lambda(f_j) \to \lambda(f)$, para todo o $\lambda \in X'$. Dada a continuidade de $\lambda \in X'$, convergência forte implica convergência fraca. Mas não o contrário: para espaços de dimensão infinita, a convergência fraca é estritamente mais fraca que a convergência em norma, como os exempos seguintes ilustram nos espaços L^p.

6. Seja $X = \mathbb{R}$, com a medida de Lebesgue.

a) Seja $f_n(x) = \chi_{]n,n+1[}(x)$. Prove que $f_n \rightharpoonup 0$ em L^p, $1 < p < \infty$, e q.t.p., mas não fortemente.

b) Seja $f_n(x) = n\chi_{]0,1/n[}(x)$. Prove que $f_n \to 0$ q.t.p., mas $f_n \not\rightharpoonup 0$ em L^p, $1 < p < \infty$, nem fortemente.