Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2019/2020

1º Teste — Versão B

(Cursos: LMAC, MEFT)

2 de Novembro de 2019, 9h

1. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2.

[1,0 val] (a) Determine a forma geral de ϕ de modo a que possa garantir que $v(x, y) = \phi(y^3 - 3x^2y)$ é a parte imaginária duma função inteira.

[1,0 val] (b) Para $\phi(t) = -t$, determine a correspondente função inteira f de acordo com a alínea anterior, e que satisfaz $f(-\mathrm{i}) = \mathrm{i}$.

[1,0 val] (c) Sendo f a função da alínea anterior, calcule justificadamente o valor de

$$\oint_\gamma \frac{\operatorname{senh}(f(z))}{(z+\mathrm{i})^2}\, dz \ ,$$

onde $\gamma(t) = 50\mathrm{i} - 2019\, e^{3it}$, com $t \in [0, 4\pi]$.

Solução:

(a) Dado que ϕ é de classe C^2 e $y^3 - 3x^2y$ é um polinómio em $\mathbb{R}^2$, portanto C^∞, a composta das duas, $v(x, y)$, é também de classe C^2. E dado que o seu domínio é simplesmente conexo, existirá parte real harmónica, $u(x, y)$ tal que $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ é inteira se e só se v for harmónica (o resultado é inteiramente análogo quer seja u dado e se procure v, como visto na aula, ou se dado v se procure u, como aqui). Assim, pela derivada da função composta, tem-se

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -6y\phi'(y^3 - 3x^2y) + (6xy)^2\phi''(y^3 - 3x^2y),$$

enquanto que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = (3y^2 - 3x^2)^2\phi''(y^3 - 3x^2y) + 6y\phi'(y^3 - 3x^2y),$$

donde se conclui que, para que seja

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow ((3y^2 - 3x^2)^2 + (6xy)^2)\phi''(y^3 - 3x^2y) = 0,$$

para todo o $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, necessariamente se tenha que ter $\phi'' = 0$, ou seja,

$$\phi(t) = At + B, \quad \text{com} \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

(b) Temos então $v(x,y) = 3x^2y - y^3$. Como tal, usando as equações de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = x^3 - 3y^2x + \alpha(y)\,,$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad -6yx + \alpha'(y) = -6xy \quad \Rightarrow \quad \alpha'(y) = 0,$$

ou seja, que $u(x,y) = x^3 - 3y^2x + c$. Tem-se então que

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = (x^3 - 3y^2x + c) + \mathrm{i}(3x^2y - y^3) \quad , \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Impondo que $f(-\mathrm{i}) = \mathrm{i}$ (o que implica $u(0,-1) =$ e $v(0,-1) = 1$) resulta que $c = 0\cdot$ Alternativamente, poderia ter-se observado simplesmente que $v(x,y) = 3x^2y - y^3 = \mathrm{Im}(z^3)$. Donde, pela unicidade dos potenciais em $\mathbb{R}^2$, a menos de uma constante, se conclui que $u(x,y) = \mathrm{Re}(z^3) + c = x^3 - 3y^2x + c$. E com condição $f(-\mathrm{i}) = \mathrm{i}$ conclui-se que $c = 0$ e portanto $f(z) = z^3$.

(c) A função f é inteira, assim como senh, e consequentemente a composta $\operatorname{senh}(f(z))$ também. Portanto qualquer caminho fechado é homotópico a um ponto em $\mathbb{C}$ e estamos nas condições de aplicação da fórmula integral de Cauchy.

$$\oint_\gamma \frac{\operatorname{senh}(f(z))}{(z+\mathrm{i})^2}\,dz = 2\pi\mathrm{i}\,I(\gamma, z_0 = -\mathrm{i})(\operatorname{senh}(f(z)))'_{|z_0=-\mathrm{i}}.$$

Mas $(\operatorname{senh}(f(z)))' = \cosh(f(z))f'(z)$ e $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x + \mathrm{i}y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$ (ou qualquer das outras três combinações possíveis de derivadas parciais de u e v, obtidas a partir das igualdades de Cauchy-Riemann, inclusivamente só usando a função original dada v sem ter que recorrer à u da alínea anterior). Ou seja $f'(z) = 3(x^2 - y^2) + \mathrm{i}(6xy) = 3z^2$, e portanto $f'(-\mathrm{i}) = -3$. O índice do caminho γ relativamente ao ponto $z_0 = -\mathrm{i}$ é 6 (o caminho γ percorre uma circunferência centrada em $50\mathrm{i}$ de raio 2019, seis vezes no sentido positivo). Assim

$$\oint_\gamma \frac{\operatorname{senh}(f(z))}{(z+\mathrm{i})^2}\,dz = 12\pi\mathrm{i}\,\cosh(f(-\mathrm{i}))f'(-\mathrm{i}) = -36\pi\mathrm{i}\cosh(\mathrm{i}) = -36\pi\mathrm{i}\cos(1).$$

[1,5 val] 2. Calcule o integral

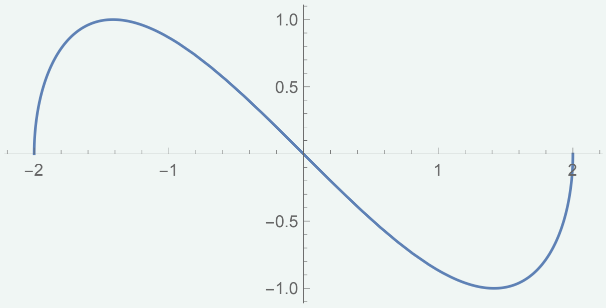
$$\int_\gamma \frac{1}{z^2 - 1}\,dz$$

onde $\gamma(t) = 2\cos(t) - \mathrm{i}\sin(2t)$, com $t \in [0, \pi]$.

Solução: Utilizaremos o teorema fundamental do cálculo para determinar este integral ao longo dum caminho aberto. Com efeito

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1/2}{z-1} - \frac{1/2}{z+1} = \frac{1}{2}(\log(z-1) - \log(z+1))'.$$

O único cuidado a ter é o de escolher ramos dos logaritmos, respectivamente centrados em 1 e -1 de modo a que os seus cortes de descontinuidade não intersectem a curva percorrida por γ (ver figura seguinte) de modo a que a primitiva seja holomorfa sobre todos os pontos da curva.



A escolha óbvia é fazer o ramo de $\log(z-1)$, centrada em 1, com "corte para cima" $\operatorname{Arg}(z-1) \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$, enquanto o ramo de $\log(z+1)$, centrada em -1, deve "cortar para baixo" $\operatorname{Arg}(z+1) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$. E assim

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2-1}\, dz = \frac{1}{2}\Big[\big(\log(-2-1) - \log(-2+1)\big) - \big(\log(2-1) - \log(2+1)\big)\Big]$$

Seguindo a escolha de ramos indicada atrás, obtemos então

$$\frac{1}{2}\Big[\big(\log 3 + \mathrm{i}\pi - \mathrm{i}\pi\big) - \big(\mathrm{i}2\pi - \log 3\big)\Big] = \log 3 - \mathrm{i}\pi.$$

[1,0 val] 3. Indique cuidadosamente, justificando, e esboce a imagem do conjunto

$$A = \{z \in \mathbb{C} : (\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} z) \leq 0 \quad \text{e} \quad 1/4 \leq |z| \leq 2\}$$

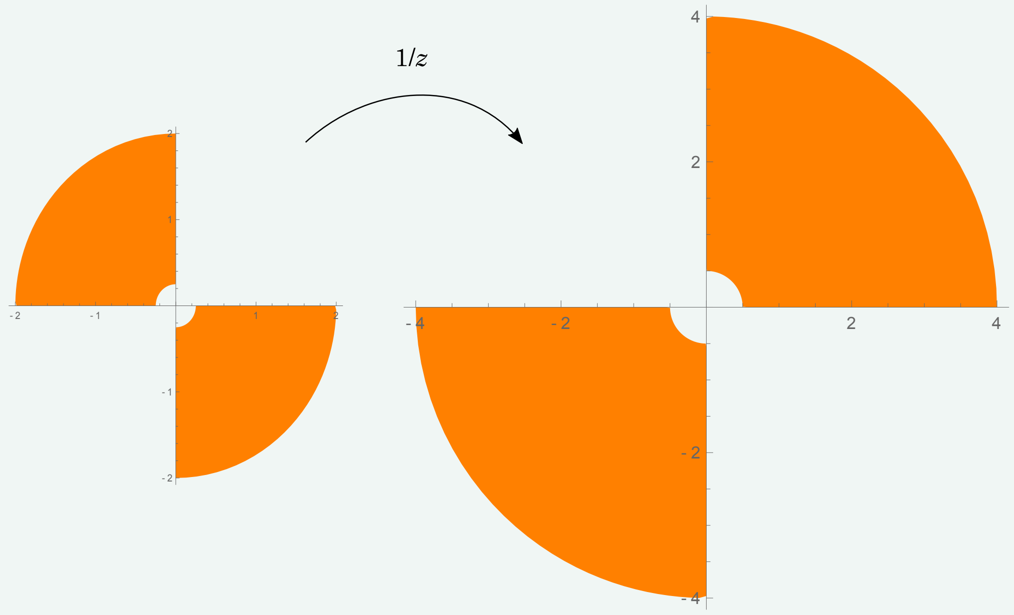
pela aplicação $z \mapsto \dfrac{1}{z}$.

Solução:

A função $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ reflecte os pontos complexos relativamente ao eixo real, por efeito do conjugado $\bar{z}$ e inverte os seus módulos já que $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$. Assim, os pontos de A que são constituídos pela coroa circular de raios entre $1/4$ e 2 intersectada com o segundo e quarto quadrantes, passam pelo efeito de $1/z$ a estar na coroa circular de raios entre $1/2$ e 4 intersectada com o primeiro e terceiro quadrantes.

Ou seja, a imagem de A através da aplicação $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ é o conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : (\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} z) \geq 0 \quad \text{e} \quad 1/2 \leq |z| \leq 4\}.$$



4. Considere a função f definida no seu domínio por

$$f(z) = \frac{z^3 - \mathrm{i}}{e^{\pi z} + 1} - z\cosh\frac{1}{z}$$

[1,5 val] (a) Calcule o valor de

$$\oint_{|z+\mathrm{i}|=3} f(z)\, dz$$

em que a curva é percorrida uma vez no sentido directo.

[0,5 val] (b) Indique, justificando cuidadosamente, qual o raio de convergência da série de Taylor de f centrada em $z_0 = 1 - \mathrm{i}$.

Solução:

(a) Escrevendo

$$f(z) = \underbrace{\frac{z^3 - \mathrm{i}}{e^{\pi z} + 1}}_{f_1(z)} \underbrace{-z\cosh\frac{1}{z}}_{f_2(z)},$$

observamos que as singularidades (isoladas) de f são $z = 0$, proveniente do termo f_2 mas onde f_1 é holomorfa, e os pontos $e^{\pi z} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\pi z} = -1 \Leftrightarrow z = (2k+1)\mathrm{i}$, provenientes de f_1 e onde f_2 é holomorfa. Destes, estão no interior da circunferência de raio 3 centrada em $-\mathrm{i}$ os pontos $z = \mathrm{i}, 0, -\mathrm{i}, -3\mathrm{i}$, que são únicos cujos resíduos contribuem para o integral pedido.

O ponto $z = 0$ é evidentemente uma singularidade essencial de f_2 e portanto de f também. Mas como f_1 é holomorfa em $z = 0$ o resíduo é o de f_2 apenas. Para o obter precisamos expandir f_2 em série de Laurent em torno de $z = 0$. Como

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n!}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{2n!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

tem-se portanto

$$-z\cosh\frac{1}{z} = -z\left(1+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}+\cdots\right) = -z-\frac{1}{2!z}-\frac{1}{4!z^3}-\cdots$$

e conclui-se que $\operatorname{Res}(f,0) = -\frac{1}{2}$.

Relativamente a f_1 começamos por observar que o denominador $e^{\pi z}+1$ tem um zero de primeira ordem em $z=-\mathrm{i}$ e, devido à sua periodicidade, também são de primeira ordem os zeros em $z=(2k+1)\mathrm{i}$. Como o numerador se anula também em $z=-\mathrm{i}$, mas não nos restantes pontos, podemos imediatamente concluir que $z=-\mathrm{i}$ é uma singularidade removível, e que $z=\mathrm{i}$ e $z=-3\mathrm{i}$ são pólos simples.

Com efeito, pela regra de Cauchy

$$\lim_{z\to-\mathrm{i}}\frac{z^3-\mathrm{i}}{e^{\pi z}+1} = \lim_{z\to-\mathrm{i}}\frac{3z^2}{\pi e^{\pi z}} = \frac{3}{\pi},$$

confirmando que se trata de uma singularidade removível.

E em $z=\mathrm{i}$ e $z=-3\mathrm{i}$ os limites correspondentes de f_1 são infinitos, confirmando que se tratam de pólos, sendo

$$\lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})\frac{z^3-\mathrm{i}}{e^{\pi z}+1} = \lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{(z^3-\mathrm{i})+3z^2(z-\mathrm{i})}{\pi e^{\pi z}} = \frac{2\mathrm{i}}{\pi},$$

enquanto que

$$\lim_{z\to-3\mathrm{i}}(z+3\mathrm{i})\frac{z^3-\mathrm{i}}{e^{\pi z}+1} = \lim_{z\to-3\mathrm{i}}\frac{(z^3-\mathrm{i})+3z^2(z+3\mathrm{i})}{\pi e^{\pi z}} = -\frac{26\mathrm{i}}{\pi},$$

donde se conlui que são efectivamente pólos simples e que estes valores são os respectivos resíduos.

Assim, pelo teorema dos resíduos,

$$\oint_{|z+\mathrm{i}|=3} f(z)\,dz = 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{1}{2}+\frac{2\mathrm{i}}{\pi}-\frac{26\mathrm{i}}{\pi}\right) = 48-\pi\mathrm{i}.$$

(b) A singularidade mais próxima de $z_0=1-\mathrm{i}$ é $-\mathrm{i}$, portanto o teorema de Taylor garante que a correspondente série centrada em $z_0=1-\mathrm{i}$ converge e é igual à função f na bola de raio 1. Mas essa singularidade é removível, e portanto f na realidade é prolongável por holomorfia ao ponto $-\mathrm{i}$, se lhe atribuíssemos o valor $\frac{3}{\pi}$ nesse ponto (ver o correspondente limite na alínea anterior). Donde a série de Taylor na verdade representa esse prolongamento analítico e tem um raio de convergência que corresponde à distância até à singularidade "efectiva"de f mais próxima, que é na realidade a singularidade essencial em $z=0$.
Portanto o raio de convergência da série de Taylor centrada em $z_0=1-\mathrm{i}$ é $R=\sqrt{2}$.

[1,5 val] 5. Utilizando um integral complexo, calcule

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{(5-3\operatorname{sen}\theta)^2}.$$

Solução:

Sendo $\operatorname{sen}\theta = (e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta})/2\mathrm{i}$ obtemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(5-3\operatorname{sen}\theta)^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(5-3(e^{\mathrm{i}\theta}-e^{-\mathrm{i}\theta})/2\mathrm{i})^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(5-3(e^{\mathrm{i}\theta}-e^{-\mathrm{i}\theta})/2\mathrm{i})^2}\frac{ie^{\mathrm{i}\theta}}{ie^{\mathrm{i}\theta}}d\theta,$$

e interpretando este último intergral como um integral complexo parametrizado em torna da circunferência de raio 1 centrada na origem por $e^{\mathrm{i}\theta}$ com $\theta \in]-\pi,\pi]$, temos então

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(5-3\operatorname{sen}\theta)^2} &= \frac{1}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1} \frac{1}{z(5-3(z-z^{-1})/2\mathrm{i})^2}\,dz\\ &= \frac{1}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1} \frac{-4z}{(-3z^2+10\mathrm{i}z+3)^2}\,dz\\ &= \frac{-4}{9\mathrm{i}}\oint_{|z|=1} \frac{z}{(z^2-\frac{10}{3}\mathrm{i}z-1)^2}\,dz.\end{aligned}$$

Pela fórmula resolvente, obtemos as raízes $(5/3 \pm 4/3)\mathrm{i}$ do polinómio de segundo grau no denominador, das quais só $\mathrm{i}/3$ se encontra no interior da circunferência de raio 1 centrada na origem, donde factorizando e aplicando a fórmula integral de Cauchy temos

$$\begin{aligned}\frac{-4}{9\mathrm{i}}\oint_{|z|=1} \frac{z}{(z^2-\frac{10}{3}\mathrm{i}z-1)^2}\,dz &= \frac{-4}{9\mathrm{i}}\oint_{|z|=1} \frac{z}{(z-3\mathrm{i})^2(z-\mathrm{i}/3)^2}\,dz\\ &= \frac{-4}{9\mathrm{i}}2\pi\mathrm{i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-3\mathrm{i})^2}\right)_{z=\mathrm{i}/3}\\ &= \frac{-8\pi}{9}\left(\frac{1}{(z-3\mathrm{i})^2}-\frac{2z}{(z-3\mathrm{i})^3}\right)_{z=\mathrm{i}/3} = \frac{5}{32}\pi.\end{aligned}$$

[1,0 val] 6. Seja f uma função holomorfa em z_0. Prove que se existe uma sucessão de pontos $z_n \neq z_0$ tais que $z_n \to z_0$ e $f(z_n) = 0$ então f é identicamente nula na maior bola contida no domínio de holomorfia de f e que, portanto, os zeros de funções holomorfas são isolados a não ser que a função seja constante igual a zero numa vizinhança deles.

Solução:

Sendo f holomorfa em z_0 então é válido o desenvolvimento em série de Taylor na maior bola centrada em z_0 e contida no domínio de holomorfia de f,

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots \quad \text{para} \quad z \in B_R(z_0).$$

Sabemos também que $f(z_n) = 0$, com $z_n \to z_0$, donde, pela continuidade de f em z_0, tem-se $f(z_0) = \lim f(z_n) = 0$. E assim concluimos em primeiro lugar que f se anula em z_0.

Mas se f tivesse então um zero de ordem $k > 0$ finita em z_0 ter-se-ia:

$$f(z) = (z-z_0)^k\left(\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0) + \cdots\right) = (z-z_0)^k\phi(z),$$

em que ϕ é holomorfa e satisfaz $\phi(z_0) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0$. Donde, por continuidade, existiria uma bola $B_r(z_0) \subset B_R(z_0)$ tal que $\phi \neq 0$ em toda essa bola. Só que, então, pela fórmula anterior

z_0 seria o único ponto em que f se anularia em $B_r(z_0)$ contradizendo o facto de que $z_n \to z_0$ com $f(z_n) = 0$.

Concluimos portanto que f não pode ter um zero de ordem k, mas sim que todas as derivadas de f têm de se anular, ou seja, pela expansão de Taylor f tem de ser identicamente nula em $B_R(z_0)$.