DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2018/2019

2º Teste — Versão B

(Cursos: MEQ, MEAmbi, MEEC, MEMec, LEAN, MEM, MEC)

15 de Dezembro de 2018, 11h — 12h30

[1,5 val] 1. Calcule a solução do problema de valor inicial

$$(4t-2)+(y-2)y'=0, \qquad y(0)=0,$$

na forma explicita, indicando o intervalo máximo de existência de solução.

Solução:

A equação é separável. Temos

$$\begin{aligned}
\int_0^t (y(s)-2)y'(s)\,ds &= \int_0^t (2-4s)\,ds \\
\left.\frac{(y(s)-2)^2}{2}\right|_0^t &= 2s-2s^2\big|_0^t \\
\frac{(y(t)-2)^2-4}{2} &= 2t-2t^2 \\
(y(t)-2)^2 &= 4(1+t-t^2) \\
y(t) &= 2-2\sqrt{1+t-t^2},
\end{aligned}$$

e o intervalo máximo de existência de solução é $]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$.

2. Considere a matriz:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

[1,5 val] (a) Determine e^{At}.

[1,0 val] (b) Resolva o problema de valor inicial:

$$\mathbf{y}'=A\mathbf{y}+e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

[0,5 val] (c) Sendo $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ uma solução arbitrária de $\mathbf{y}'=A\mathbf{y}$, determine $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathbf{y}(t)$.

Solução:

(a) A matriz A tem um único valor próprio, dado por:

$$\det(A-\lambda I) = (-1-\lambda)(-3-\lambda)+1 = \lambda^2+4\lambda+4 = (\lambda+2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -2$$

O vector próprio associado é solução não nula de

$$\begin{aligned}(A+2I)\mathbf{v} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad b=-a \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = (a,-a) = a(1,-1),\end{aligned}$$

com $a \in \mathbb{R}$, pelo que podemos escolher $\mathbf{v}_p = (1,-1)$ como vector próprio. Como não existem dois vectores próprios linearmente independentes associados ao único valor próprio de A, a matriz não é diagonalizável. Prosseguimos então com o cálculo de um vector próprio generalizado:

$$\begin{aligned}(A+2I)\mathbf{v} = \mathbf{v}_p \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad a = 1-b \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = (1-b,b) = (1,0) - b(1,-1).\end{aligned}$$

Podemos então tomar $\mathbf{v}_g = (1,0)$.
A matriz A é então semelhante a uma matriz de Jordan $A = SJS^{-1}$, com

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por fim:

$$\begin{aligned} e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= e^{-2t}\begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(b) Usando a fórmula da variação das constantes:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= e^{At}\left(\mathbf{y}(0) + \int_0^t e^{-As}e^{-2s}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} ds\right) \\ &= e^{At}\left(\mathbf{y}(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} 1-s & -s \\ s & 1+s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} ds\right) \\ &= e^{At}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} ds\right) \\ &= e^{At}\begin{bmatrix} 1+t \\ -1-t \end{bmatrix} \\ &= e^{-2t}\begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix}(1+t)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= (1+t)e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(c) A solução geral da equação $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ é:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= e^{At}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = e^{-2t}\begin{bmatrix} c_1 + (c_1+c_2)t \\ c_2 - (c_1+c_2)t \end{bmatrix} \\ &= e^{-2t}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + (c_1+c_2)te^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Como $\lim_{t\to+\infty} e^{-2t} = 0$ e $\lim_{t\to+\infty} te^{-2t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^{2t}} = 0$, então $\lim_{t\to+\infty} \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (para quaisquer $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$).

3. Considere a equação diferencial

$$y''' - 2y'' - 3y' = b(t),$$

onde $b(t)$ é uma função real, definida e contínua em $\mathbb{R}$.

[0,5 val] (a) Determine a solução geral da equação homogénea associada.

[1,0 val] (b) Sendo $b(t) = -6 - 6e^{2t}$, determine a solução da equação diferencial que verifica:

$$y(0) = 2\,, \qquad y'(0) = 4\,, \qquad y''(0) = 4\,.$$

[0,5 val] (c) Escreva a equação diferencial na forma de uma equação vectorial linear de 1ª ordem e indique uma matriz solução fundamental para a mesma.

Solução:

(a) A equação homogénea associada pode ser escrita na forma

$$(D^3 - 2D^2 - 3D)y = 0$$

pelo que o polinómio característico é

$$P(R) = R^3 - 2R^2 - 3R = R(R-3)(R+1)\,.$$

Assim, a solução geral da equação é

$$y_H(t) = a + be^{3t} + ce^{-t} \qquad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

(b) Começemos por calcular a solução geral da equação. Por ser uma equação linear, a sua solução geral é da forma

$$y(t) = y_H(t) + y_p(t)$$

em que $y_H(t)$ é a solução geral da equação homogénea (determinada em (a)) e $y_p(t)$ é uma solução particular da equação. Pela forma de $b(t)$ é aplicável o método dos coeficientes indeterminados. Sendo $P_A(D) = D(D-2)$ o polinómio aniquilador de $b(t)$ teremos que

$$\begin{aligned}(D^3 - 2D^2 - 3D)y = -6 - 6e^{2t} \quad &\Leftrightarrow \quad D^2(D-2)(D-3)(D+1)y = D(D-2)[-6 - 6e^{2t}] \\ &\Leftrightarrow \quad D^2(D-2)(D-3)(D+1)y = 0\,.\end{aligned}$$

A sua solução geral é

$$\alpha + \beta t + \gamma e^{2t} + \delta e^{3t} + \theta e^{-t} \,,$$

e comparando com a solução encontrada na alínea a), podemos considerar que a forma da solução particular é

$$w(t) = \beta t + \gamma e^{2t} \,.$$

Temos agora que determinar as constantes β e γ de forma a que w verifique

$$w''' - 2w'' - 3w' = -6 - 6e^{2t} \;,\; \forall t \in \mathbb{R} \,.$$

Substituindo

$$8\gamma e^{2t} - 8\gamma e^{2t} - 3(\beta + 2\gamma e^{2t}) = -6 - 6e^{2t} \;,\; \forall t \in \mathbb{R}$$

o que implica que $\beta = 2$ e $\gamma = 1$. Conclui-se que $y_P(t) = 2t + e^{2t}$, e como tal a solução geral da equação é

$$y(t) = a + be^{3t} + ce^{-t} + 2t + e^{2t} \,.$$

Finalmente, determinamos as constates a, b e c de forma a que a condição inicial se verifique.

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 4 \\ y''(0) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c + 1 = 2 \\ 3b - c + 4 = 4 \\ 9b + c + 4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

e assim a solução do problema de valor inicial é

$$1 + 2t + e^{2t} \,.$$

(c) Uma equação diferencial escalar de terceira ordem pode ser escrita como uma equação vectorial de ordem 1 em $\mathbb{R}^3$ na seguinte forma: Fazendo

$$X(t) = (x_0(t), x_1(t), x_2(t)) = (y(t), y'(t), y''(t)) \,,$$

tem-se que

$$X'(t) = (x_0'(t), x_1'(t), x_2'(t)) = (y'(t), y''(t), y'''(t)) = ((x_1(t), x_2 t), b(t) + 3x_1(t) + 2x_2(t)) \,,$$

ou seja

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix} .$$

Uma matriz solução fundamental para este sistema é por exemplo uma matriz Wronskiana. Usando a alínea a)

$$W(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^{3t} & e^{-t} \\ 0 & 3e^{3t} & -e^{-t} \\ 0 & 9e^{3t} & e^{-t} \end{bmatrix} .$$

[1,0 val] 4. (a) Determine o desenvolvimento em série de senos da função $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se} \quad 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{se} \quad \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

e determine a soma da série, para cada $x \in \mathbb{R}$.

[1,5 val] (b) Resolva o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4t^3 u & 0 < x < 2\pi \quad , \quad t > 0 \\ u(t,0) = u(t,2\pi) = 0 & t \geq 0 \\ u(0,x) = f(x) & 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Resolução:

(a) Para obter um desenvolvimento de Fourier em série de senos, prolonga-se f ao intervalo $[-2\pi, 0[$ de forma ímpar e obtém-se assim a sua série de Fourier,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

em que $L = 2\pi$ e os coeficientes b_n são dados por

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 3\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)dx \\ &= -\frac{6}{\pi n}\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = -\frac{6}{\pi n}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right]. \end{aligned}$$

Assim a série de Fourier de senos de f é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{\pi n}\left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]\operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right).$$

Como o prolongamento ímpar de f, em $[-2\pi, 2\pi]$, é seccionalmente C^1, com descontinuidades em $x = 0$ e $x = \pm\pi$, o teorema da convergência pontual das séries de Fourier garante que a correspondente série de senos converge, em cada $x \in [-2\pi, 2\pi]$, para

$$\begin{cases} 0 & \text{se} \quad -2\pi \leq x < -\pi \\ -3/2 & \text{se} \quad x = -\pi \\ -3 & \text{se} \quad -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 3 & \text{se} \quad 0 < x < \pi \\ 3/2 & \text{se} \quad x = \pi \\ 0 & \text{se} \quad \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

Nos restantes pontos de $x \in \mathbb{R}$ a série converge para o prolongamento periódico, de período 4π, desta função.

(b) Observamos que a equação diferencial parcial dada, assim como as condições de fronteira, são homogéneas. É válido, por isso, o princípio da sobreposição, ou seja, funções obtidas por combinações lineares arbitrárias de soluções da equação e das condições de fronteira ainda as satisfazem.

Vamos por isso usar o método de separação de variáveis, construindo soluções gerais por combinação linear (eventualmente infinita) de soluções mais simples, da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$, para $0 \leq x \leq 2\pi$ e $t \geq 0$. Substituindo na equação diferencial parcial obtemos

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x) - 4t^3 T(t)X(x) \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} + 4t^3 = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Esta igualdade só é possivel se as funções dos dois lados da igualdade, de variáveis diferentes x e t, forem ambas iguais a uma constante, digamos λ. Portanto é equivalente ao sistema seguinte, onde λ é um número real qualquer

$$\begin{cases} T'(t) = (\lambda - 4t^3)T(t) \\ X''(x) - \lambda X(x) = 0. \end{cases}$$

A primeira equação é uma equação linear homogénea para $T(t)$, cuja solução geral é

$$T(t) = Ae^{\lambda t - t^4} \text{ com } A \in \mathbb{R}.$$

A expressão para as soluções da segunda equação depende do sinal de λ. Temos

$$X(x) = \begin{cases} Be^{\sqrt{\lambda}x} + Ce^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{se } \lambda > 0 \\ Bx + C & \text{se } \lambda = 0 \\ B\cos\sqrt{-\lambda}x + C\,\mathrm{sen}\,\sqrt{-\lambda}x & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$$

onde B, C são constantes reais.
As condições de fronteira homogéneas $u(t,0) = u(t,2\pi) = 0$ para as soluções da forma $T(t)X(x)$ não nulas dizem que

$$T(t)X(0) = T(t)X(2\pi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(2\pi) = 0 \end{cases}$$

Impondo estas condições às soluções $X(x)$ determinadas acima temos

(i) Para $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ Be^{\sqrt{\lambda}2\pi} + Ce^{-\sqrt{\lambda}2\pi} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

(ii) Para $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} C = 0 \\ B2\pi + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

(iii) Para $\lambda < 0$:

$$\begin{cases} B = 0 \\ B\cos(\sqrt{-\lambda}2\pi) + C\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\lambda}2\pi) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \text{ ou } \sqrt{-\lambda}2\pi = n\pi \end{cases}$$

donde obtemos as soluções não nulas $X(x) = C\,\mathrm{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)$ com $n = 1, 2, \cdots$, para $\lambda = -\frac{n^2}{4}$.

As soluções não triviais da equação diferencial da forma $T(t)X(x)$ que satisfazem as condições de fronteira são portanto as funções da forma

$$A\,\mathrm{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)e^{-\frac{n^2}{4}t - t^4}$$

com $A \in \mathbb{R}$ e $n = 1, 2, \ldots$.
Procuramos agora uma solução formal para a equação e condição inicial que seja uma "combinação linear infinita" das soluções obtidas acima:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)e^{-\frac{n^2}{4}t - t^4}.$$

Substituindo esta expressão na condição inicial $u(0,x) = f(x)$ obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{nx}{2}\right) = f(x)$$

pelo que os coeficientes c_n são os coeficientes da série de senos obtida na alínea anterior. Sendo assim

$$c_n = \frac{6}{\pi n}\left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

e portanto a solução é

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{\pi n}\left[1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{nx}{2}\right) e^{-\frac{n^2}{4}t - t^4}.$$

[1,0 val] 5. Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}$, considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{f(x)}{1+f^2(x)} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Mostre que para qualquer $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ este problema admite uma única solução local e determine o seu intervalo máximo de existência de solução.

Resolução:

Sendo $F(x,t) = \frac{f(x)}{1+f^2(x)}$ temos que $F(x,t)$ e $\frac{\partial F}{\partial x}$ são funções contínuas no plano real $\mathbb{R}^2$. Portanto o teorema de Picard-Lindelöf garante que para qualquer ponto (t_0, x_0) no plano real existe uma única solução local da equação $x' = F(x,t)$ que satisfaz $x(t_0) = x_0$. Como $|F(x,t)| \leq \frac{1}{2}$, $y(t)$ não explode em tempo finito para $\pm\infty$. De facto

$$\begin{aligned} |x(t) - x(t_0)| &= \left| \int_{t_0}^{t} \frac{dx}{ds}\, ds \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^{t} \frac{f(s)}{1+f^2(s)}\, ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \left| \frac{f(s)}{1+f^2(s)} \right| |ds| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2} |ds| \\ &= \frac{|t-t_0|}{2}. \end{aligned}$$

Logo o intervalo máximo de existência é $\mathbb{R}$. Para ver que

$$\left| \frac{f(x)}{1+f^2(x)} \right| \leq \frac{1}{2}$$

basta considerar a função $g(x) = x/(1+x^2)$ e notar que

i) $g'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$ se e só se $x = \pm 1$,

ii) $g'(x) < 0$ e $g(x) > 0$ se $x > 1$,

iii) $g'(x) < 0$ e $g(x) < 0$ se $x < 1$,

iv) $g'(x) > 0$ se e só se $|x| < 1$,

v) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$.

Portanto $g(1) = \frac{1}{2}$ é o máximo e $g(-1) = -\frac{1}{2}$ é o mínimo de $g(x)$. Logo

$$-\frac{1}{2} \leq g(f(x)) = \frac{f(x)}{1 + f^2(x)} \leq \frac{1}{2}.$$