TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2017/2018

2º Teste — Versão B

(CURSOS: MEBIOL, MEQ, MEM, MEAMBI, MEEC, MEMEC, LEAN)

16 de Dezembro de 2017, 11h

Duração: 1h 30m

[2,0 val.] 1. Resolva o problema de valor inicial

$$(y^2 + 2t^4y^2)y' = 4t^3, \qquad y(0) = -1,$$

e indique o intervalo máximo de definição da solução.

Resolução:

A equação diferencial pode-se escrever na forma

$$y^2 \frac{dy}{dt} = \frac{4t^3}{1+2t^4}$$

Esta equação é separável, pelo que a sua solução geral é:

$$\frac{y^3}{3} = \frac{1}{2}\log(1+2t^4) + C \qquad \text{onde } \ C \in \mathbb{R}$$

Como $y(0) = -1$ então $C = -1/3$ e

$$y(t) = \sqrt[3]{\tfrac{3}{2}\log(1+2t^4) - 1}$$

Tendo em conta que a derivada da solução explode quando

$$\frac{3}{2}\log(1+2t^4) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 2t^4 = e^{2/3} \quad \Leftrightarrow \quad t = \pm\sqrt[4]{\frac{e^{2/3}-1}{2}},$$

e que $y(0) = -1 < 0$, segue que a solução obtida está definida para

$$\frac{3}{2}\log(1+2t^4) - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \in \left] -\sqrt[4]{\frac{e^{2/3}-1}{2}}, \sqrt[4]{\frac{e^{2/3}-1}{2}} \right[.$$

2. Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

[1,0 val.] (a) Determine a matriz $e^{\mathbf{A}t}$.

[1,0 val.] (b) Sendo $\mathbf{y}(t)$ uma função com valores em $\mathbb{R}^3$, resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = \mathbf{Ay} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2e^{-t} \\ 3t^2e^{2t} \end{bmatrix} \qquad , \qquad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

[0,5 val.] (c) Indique quais os valores de (a, b, c), de forma que o problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = \mathbf{Ay} \qquad , \qquad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T ,$$

tenha solução limitada para $t \in [0, +\infty[$.

Resolução:

(a) Os valores próprios da matriz $\mathbf{A}$ são -1, 2 e 3, pelo que $\mathbf{A}$ é uma matriz diagonalizável. Os vectores próprios associados são

- para $\lambda = -1$: $(\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ implica que $\mathbf{v} = (0, \alpha, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Podemos escolher $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)$.
- para $\lambda = 2$: $(\mathbf{A}-\mathbf{2I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ implica que $\mathbf{v} = (0, 0, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Podemos escolher $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1)$.
- para $\lambda = 3$: $(\mathbf{A}-\mathbf{3I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ implica que $\mathbf{v} = (4\alpha, \alpha, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Podemos escolher $\mathbf{v}_3 = (4, 1, 0)$.

Assim, uma matriz solução fundamental associada a $\mathbf{y}' = \mathbf{Ay}$ é

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & e^{3t}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4e^{3t} \\ e^{-t} & 0 & e^{3t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \end{bmatrix}$$

e então

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4e^{3t} \\ e^{-t} & 0 & e^{3t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ \frac{e^{3t}-e^{-t}}{4} & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou

Dado que a matriz é diagonalizável, é semelhante a uma matriz diagonal, ou seja, $\mathbf{A} = \mathbf{SDS^{-1}}$ em que

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{S}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ \frac{e^{3t}-e^{-t}}{4} & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou

Resolvendo o sistema $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$,

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = x - y \\ z' = 2z \end{cases}$$

Resolvendo a primeira e terceira equações, obtem-se $x(t) = ae^{3t}$ e $z(t) = be^{2t}$. Substituindo na segunda equação

$$y' + y = ae^{3t} \quad \Leftrightarrow \quad \left(e^t y\right)' = ae^{4t} \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \frac{a}{4}e^{3t} + ce^{-t}$$

Assim

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^{3t} \\ \frac{a}{4}e^{3t} + ce^{-t} \\ be^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ \frac{e^{3t}}{4} & 0 & e^{-t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

A matriz

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ \frac{e^{3t}}{4} & 0 & e^{-t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \end{bmatrix}$$

é uma solução fundamental associada a $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, pelo que

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(0) = \mathbf{X}(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ \frac{e^{3t}-e^{-t}}{4} & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

(b) Usando a fórmula da variação das constantes

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= e^{\mathbf{A}t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{\mathbf{A}t} \int_0^t e^{-\mathbf{A}s} \begin{bmatrix} 0 \\ 2e^{-s} \\ 3s^2 e^{2s} \end{bmatrix} ds \\ &= e^{\mathbf{A}t} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-3s} & 0 & 0 \\ \frac{e^{-3s}-e^{s}}{4} & e^{s} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2e^{-s} \\ 3s^2 e^{2s} \end{bmatrix} ds \\ &= e^{\mathbf{A}t} \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3s^2 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ \frac{e^{3t}-e^{-t}}{4} & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2t \\ t^3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2te^{-t} \\ t^3 e^{2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(c) A solução do (PVI)

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \qquad , \qquad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T ,$$

é dada por

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4ae^{3t} \\ a(-e^{-t} + e^{3t}) + 4be^{-t} \\ 4ce^{2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4ae^{3t} \\ (-a + 4b)e^{-t} + ae^{3t} \\ 4ce^{2t} \end{bmatrix}$$

Visto que

$$\lim_{y \to +\infty} e^{-t} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{y \to +\infty} e^{2t} = \lim_{y \to +\infty} e^{3t} = \infty$$

para que a solução $\mathbf{y}$ seja limitada em $[0,+\infty[$, todas as suas componentes têm de ser limitadas nesse intervalo e, como tal, na sua expressão a contribuição das funções e^{2t} e e^{3t} tem que ser nula. Assim, a solução em $t=0$ tem que pertencer ao espaço próprio associado ao vector próprio -1, ou seja, $\mathbf{y}(0) \in E_{-1} = \{\alpha(0,1,0)\,,\,\alpha\in\mathbb{R}\}$. Conclui-se que $(a,b,c)=(0,b,0)$ para qualquer $b\in\mathbb{R}$.

De outra forma, olhando directamente para a solução, a, b e c têm que ser escolhidos de modo a eliminar os termos com e^{2t} e e^{3t}, chegando-se à mesma conclusão.

3. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y''-4y'+4y = 8t+2e^{2t} \\ \\ y(0)=1\,,\,y'(0)=2\ . \end{cases}$$

[0,5 val.] (a) Escreva e resolva a equação homogénea associada.

[1,0 val.] (b) Determine uma solução particular da equação diferencial.

[0,5 val.] (c) Resolva o o problema de valor inicial.

Resolução:

(a) A equação homogénea associada é

$$y''-4y'+4y=0.$$

O seu polinómio característico, $P(R)=R^2-4R+4$, tem uma única raíz $R=2$ com multiplicidade 2. Desta forma, a solução geral da equação homogénea é:

$$y_G(t)=c_1e^{2t}+c_2te^{2t},$$

com $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

(b) O aniquilador de $b(t)=8t+2e^{2t}$ é

$$P_A(D)=D^2(D-2)$$

Logo, uma solução da equação não homogénea terá que ser solução da equação diferencial

$$D^2(D-2)^3y=0$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1e^{2t}+c_2te^{2t}+c_3t^2e^{2t}+c_4+c_5t \\ &= y_G(t)+c_3t^2e^{2t}+c_4+c_5t \end{aligned}$$

para certos $c_1,c_2,c_3,c_4,c_5\in\mathbb{R}$. Desta forma, existe uma solução particular da equação

$$(D-2)^2y=8t+2e^{2t} \tag{1}$$

da forma $y_p(t)=c_3t^2e^{2t}+c_4+c_5t$. Substituindo esta expressão na equação (1), obtemos

$$2c_3e^{2t}+4c_4-4c_5+4c_5t=8t+2e^{2t}, \qquad \text{para qualquer } t\in\mathbb{R},$$

o que é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 2c_3 = 2 \\ 4c_4 - 4c_5 = 0 \\ 4c_5 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_3 = 1 \\ c_4 = 2 \\ c_5 = 2 \end{cases}$$

Assim $y_p(t) = t^2e^{2t} + 2 + 2t$ é uma solução particular da equação, pelo que a solução geral da equação (1) é

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + t^2e^{2t} + 2 + 2t, \qquad \text{com} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) Como $y'(t) = 2c_1e^{2t} + c_2(1+2t)e^{2t} + (2t+2t^2)e^{2t} + 2$, resulta das condições iniciais que:

$$\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 + 2 \\ 2 = y'(0) = 2c_1 + c_2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

Assim, a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = (-1 + 2t + t^2)e^{2t} + 2 + 2t.$$

[1,0 val.] 4. (a) Determine o desenvolvimento em série de senos da função

$$f(x) = x - 2, \quad x \in [0, 4].$$

Estude a convergência pontual da série em $\mathbb{R}$.

[1,5 val.] (b) Resolva o problema de valor inicial e valores na fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = (2 + 6t^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < 4 \ , \ t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, 4) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = f(x) & 0 < x < 4. \end{cases}$$

Resolução:

(a) Para escrever a função f, definida em $[0, 4]$ como uma série de Fourier de senos, começamos por considerar o prolongamento ímpar de f ao intervalo $[-4, 0]$. Obtemos assim uma função ímpar em $[-4, 4]$ pelo que a correspondente série de Fourier, com $L = 4$, terá os correspondentes coeficientes dos cosenos iguais a zero, e os dos senos

$$b_n = \frac{2}{4}\int_0^4 f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^4 (x-2) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx.$$

Este integral calcula-se por partes,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{n\pi}\left(\left[(2-x)\cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right)\right]_0^4 + \int_0^4 \cos\left(\frac{n\pi x}{4}\right) dx\right) \\ &= \frac{2}{n\pi}\left(-2\cos(n\pi) - 2 + \frac{4}{n\pi}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)\right]_0^4\right) \\ &= \frac{4}{n\pi}\left((-1)^{n+1} - 1\right). \end{aligned}$$

Assim, a série de Fourier de senos de f é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi} \left((-1)^{n+1} - 1\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Como o prolongamento ímpar de f, em $[-4,4]$, é seccionalmente C^1, com descontinuidades em $x = 0$ e $x = \pm 4$, o teorema da convergência pontual das séries de Fourier garante que a correspondente série de senos converge, em cada $x \in [-4,4]$, para

$$\begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = -4, 0 \text{ ou } 4 \\ 2+x & \text{se} \quad -4 < x < 0 \\ x-2 & \text{se} \quad 0 < x < 4 \end{cases}$$

Nos restantes pontos de $x \in \mathbb{R}$ a série converge para o prolongamento periódico, de período 8, desta função.

(b) Observamos que a equação diferencial parcial dada, assim como as condições de fronteira, são homogéneas. É válido, por isso, o princípio da sobreposição, ou seja, funções obtidas por combinações lineares arbitrárias de soluções da equação e das condições de fronteira ainda as satisfazem.

Vamos por isso usar o método de separação de variáveis, construindo soluções gerais por combinação linear (eventualmente infinita) de soluções mais simples, da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$, para $0 \leq x \leq 4$ e $t \geq 0$. Substituindo na equação diferencial parcial obtemos

$$T'(t)X(x) = (2+6t^2)T(t)X''(x) \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{(2+6t^2)T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Esta igualdade só é possivel se as funções dos dois lados da igualdade, de variáveis diferentes x e t, forem ambas iguais a uma constante, digamos λ. Portanto é equivalente ao sistema seguinte, onde λ é um número real qualquer

$$\begin{cases} T'(t) = \lambda(2+6t^2)T(t) \\ X''(x) - \lambda X(x) = 0. \end{cases}$$

A primeira equação é uma equação linear homogénea para $T(t)$, cuja solução geral é

$$T(t) = Ae^{2\lambda t(1+t^2)} \text{ com } A \in \mathbb{R}.$$

A expressão para as soluções da segunda equação depende do sinal de λ. Temos

$$X(x) = \begin{cases} Be^{\sqrt{\lambda}x} + Ce^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{se } \lambda > 0 \\ Bx + C & \text{se } \lambda = 0 \\ B\cos\sqrt{-\lambda}x + C\operatorname{sen}\sqrt{-\lambda}x & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$$

onde B, C são constantes reais.

As condições de fronteira homogéneas $u(t,0) = u(t,4) = 0$ para as soluções da forma $T(t)X(x)$ não nulas dizem que

$$T(t)X(0) = T(t)X(4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(4) = 0 \end{cases}$$

Impondo estas condições às soluções $X(x)$ determinadas acima temos

(i) Para $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ Be^{\sqrt{\lambda}4} + Ce^{-\sqrt{\lambda}4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

(ii) Para $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} C = 0 \\ B4 + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

(iii) Para $\lambda < 0$:

$$\begin{cases} B = 0 \\ B\cos\sqrt{-\lambda}4 + C\,\mathrm{sen}\,\sqrt{-\lambda}4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \text{ ou } \sqrt{-\lambda}4 = n\pi \end{cases}$$

donde obtemos as soluções não nulas $X(x) = C\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right)$ com $n = 1, 2, \cdots$, para $\lambda = -\frac{n^2\pi^2}{16}$.

As soluções não triviais da equação diferencial da forma $T(t)X(x)$ que satisfazem as condições de fronteira são portanto as funções da forma

$$A\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{8}t(1+t^2)}$$

com $A \in \mathbb{R}$ e $n = 1, 2, \ldots$.

Procuramos agora uma solução formal para a equação e condição inicial que seja uma "combinação linear infinita"das soluções obtidas acima:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{8}t(1+t^2)}.$$

Substituindo esta expressão na condição inicial $u(0,x) = f(x)$ obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) = f(x)$$

pelo que os coeficientes c_n são os coeficientes da série de senos obtida na alínea anterior. Sendo assim

$$c_n = \frac{4}{n\pi}\left((-1)^{n+1} - 1\right)$$

e portanto a solução é

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi}\left((-1)^{n+1} - 1\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{4}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{8}t(1+t^2)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{n\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{2}t(1+t^2)}. \end{aligned}$$

[1,0 val.] 5. Considere a função $f(t,y)$ definida por

$$f(t,y) = \begin{cases} \sqrt{1-y^2} & \text{se} \quad |y| \le 1 \\ 0 & \text{se} \quad |y| \; > 1 \end{cases} .$$

Determine duas soluções distintas do seguinte problema de valor inicial

$$y' = f(t,y) \qquad , \qquad y(0) = 1\,.$$

definidas em $\mathbb{R}$ e justifique por que razão este facto não contradiz o Teorema de Picard.

Resolução:

NOTA: O enunciado original continha uma gralha, em que a condição inicial era dada como $y(0) = 0$ em vez de $y(0) = 1$.

A solução constante, identicamente igual um para todo o $t \in \mathbb{R}$, $y(t) \equiv 1$, é evidentemente uma solução do problema de valor inicial dado.

Por outro lado, a equação é separável. Para $y > 1$ ou $y < -1$ as soluções são constantes. Para $-1 < y < 1$ temos

$$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \operatorname{arcsen}(y(t)) = 1 \Leftrightarrow y(t) = \operatorname{sen}(t+c).$$

Observe-se, da equação original, que $y' > 0$, pelo que esta solução só é válida para $-\frac{\pi}{2} < t+c < \frac{\pi}{2}$. Fazendo $c = \frac{\pi}{2}$ obtém-se precisamente uma outra solução que, em $t = 0$, satisfaz a mesma condição inicial e "cola" com a solução constante anterior $y(t) \equiv 1$, assim como em $t = -\pi$ "cola", para o passado, com a solução constante $y(t) \equiv -1$.

Assim, uma segunda solução do problema de valor inicial é

$$y(t) \begin{cases} -1 & \text{se} \quad t < -\pi \\ \operatorname{sen}(t + \frac{\pi}{2}) & \text{se} \quad -\pi \leq t \leq 0 \\ 1 & \text{se} \quad t > 0 \end{cases} .$$

A existência destas duas soluções do mesmo problema de valor inicial, e consequente falta de unicidade, não contradiz o teorema de Picard-Lindelöf porque a função $f(t, y)$ da equação diferencial não é localmente Lipschitziana em $y = \pm 1$, visto $\sqrt{1-y^2}$ ter derivada infinita nesses pontos. A condição incial é dada precisamente num desses pontos onde não são satisfeitas as condições do teorema.