TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2017/2018

1º Teste — Versão A

(Cursos: MEBiol, MEQ, MEM, MEAmbi, MEEC, MEMec, LEAN)

4 de Novembro de 2017, 11h

Duração: 1h 30m

1. Considere a função real definida em $\mathbb{R}^2$ por $u(x,y) = x^3 + a\,xy^2 + b\,e^x \operatorname{sen} y$, em que $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes reais.

[1,0 val.] (a) Determine os valores de a e b de modo a que u seja a parte real duma função holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Resolução:

Para que u seja a parte real de uma função holomorfa em $\mathbb{C}$, terá que ser harmónica em $\mathbb{R}^2$. Dado que, para quaisquer valores de a e b, a função u tem segunda derivada contínua em $\mathbb{R}^2$, temos apenas que calcular os valores das constantes para os quais

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

Assim

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(3x^2 + ay^2 + be^x \operatorname{sen} y\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(2axy + be^x \cos y\Big) = 0 \;\Leftrightarrow\; 6x + be^x \operatorname{sen} y + 2ax - be^x \operatorname{sen} y = 0 .$$

Esta condição será verificada, para todo x e y, se $a = -3$ e b qualquer.

[1,0 val.] (b) Considerando $a = -3$ e $b = 2$, determine a função f, holomorfa em $\mathbb{C}$, tal que $\operatorname{Re}(f) = u$ e $f(0) = 2i$.

Resolução:

Começemos por determinar a harmónica conjugada de $u(x,y) = x^3 - 3\,xy^2 + 2\,e^x \operatorname{sen} y$. Denominando-a por v, será determinada pelas condições de Cauchy-Riemann. Assim

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \;\Leftrightarrow\; v(x,y) = \int \Big(3x^2 - 3y^2 + 2\,e^x \operatorname{sen} y\Big) dy + c(x) .$$

ou seja

$$v(x,y) = 3x^2 y - y^3 - 2\,e^x \cos y + c(x) .$$

Por outro lado

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \;\Leftrightarrow\; 6xy - 2\,e^x \cos y + c'(x) = -\Big(-6xy + 2\,e^x \cos y\Big) ,$$

donde $c(x) = c$, em que c é uma constante real. Então

$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 - 2\,e^x \cos y + c \qquad , \qquad c \in \mathbb{R}\,,$$

e assim

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = x^3 - 3\,xy^2 + 2\,e^x \operatorname{sen} y + \mathrm{i}(3x^2y - y^3 - 2\,e^x \cos y + c)\,.$$

Para que $f(0) = 2\mathrm{i}$,

$$\begin{cases} u(0,0) = 0 & , \quad \text{o que se verifica} \\ \\ v(0,0) = 2 & \Leftrightarrow \qquad -2 + c = 2 \end{cases}$$

Concluindo-se que a função pedida é

$$f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = x^3 - 3\,xy^2 + 2\,e^x \operatorname{sen} y + \mathrm{i}(3x^2y - y^3 - 2\,e^x \cos y + 4)\,.$$

[1,0 val.] (c) Calcule os valores de $f'(0)$ e $f''(0)$.

Resolução:

Para calcular a primeira derivada, podemos usar , por exemplo

$$f'(z) = f'(x + \mathrm{i}y) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\,,$$

e usando a mesma fórmula para calcular a segunda derivada, obtém-se

$$f''(z) = \Big(f'(x + \mathrm{i}y)\Big)' = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathrm{i}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,.$$

Assim

$$f'(0) = 3x^2 - 3y^2 + 2\,e^x \operatorname{sen} y + \mathrm{i}(6xy - 2\,e^x \cos y)\Big|_{(x,y)=(0,0)} = -2\mathrm{i}$$

e

$$f''(0) = 6x + 2\,e^x \operatorname{sen} y + \mathrm{i}(6y - 2\,e^x \cos y)\Big|_{(x,y)=(0,0)} = -2\mathrm{i}\,.$$

2. Considere a função complexa f definida no seu domínio por

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z - \mathrm{i})}{z^2 + 1}.$$

[1,5 val.] (a) Determine todos os possíveis valores de

$$\oint_C f(z)\,dz,$$

em que C é qualquer curva de Jordan contida em $\mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$.

Resolução:

Começamos por notar que

$$\begin{aligned} f(z) \quad &= \quad \frac{\operatorname{sen}(z - \mathrm{i})}{z^2 + 1} = \frac{\operatorname{sen}(z - \mathrm{i})}{(z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i})} \quad = \quad \frac{(z - \mathrm{i}) - \frac{1}{3!}(z - \mathrm{i})^2 + \frac{1}{5!}(z - \mathrm{i})^5 - \ldots}{(z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i})} \\ &= \quad \frac{1 - \frac{1}{3!}(z - \mathrm{i})^2 + \frac{1}{5!}(z - \mathrm{i})^4 - \ldots}{z + \mathrm{i}}\,, \quad \text{para qualquer } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}, \end{aligned}$$

onde a função $\phi(z) = 1 - \frac{1}{3!}(z-\mathrm{i})^2 + \frac{1}{5!}(z-\mathrm{i})^4 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(z-\mathrm{i})^{2n}}{(2n+1)!}$ é analítica em $\mathbb{C}$, pois é a soma de uma série de potências com raio de convergência infinito. Assim sendo, e como C está contida em $\mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$:

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z+\mathrm{i}} \qquad \text{para qualquer } z \in C.$$

Caso 1: $-\mathrm{i} \in \operatorname{ext} C$. Como $\frac{\phi(z)}{z+\mathrm{i}}$ é analítica em $\overline{\operatorname{int} C}$, pelo teorema de Cauchy:

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C \frac{\phi(z)}{z+\mathrm{i}}\,dz = 0$$

Caso 2: $-\mathrm{i} \in \operatorname{int} C$. Se a curva C for percorrida no sentido directo então, como $\phi(z)$ é analítica em $\overline{\operatorname{int} C}$, pela fórmula integral de Cauchy:

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C \frac{\phi(z)}{z+\mathrm{i}}\,dz = 2\pi\mathrm{i}\,\phi(-\mathrm{i}) = 2\pi\mathrm{i}\,\frac{\operatorname{sen}(-2\mathrm{i})}{-2\mathrm{i}} = \pi\mathrm{i}\operatorname{sh} 2$$

Se a curva C for percorrida no sentido inverso então, pelo calculo anterior:

$$\oint_C f(z)\,dz = -\oint_{-C} f(z)\,dz = -\pi\mathrm{i}\operatorname{sh} 2.$$

Nota: caso não usasse o facto de que i é singularidade removível, poderia ainda assim resolver o problema por aplicação dos teoremas de Cauchy e da fórmula integral de Cauchy. Porém, teria que considerar quatro casos — consoante a localização das singularidades $\pm\mathrm{i}$ relativamente a C.

[0,5 val.] (b) Decida, justificando, se f tem primitiva em $\mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$. E se o domínio de f for $\mathbb{C} \setminus (\{\mathrm{i}\} \cup \{z = \mathrm{i}y : y \leq -1\})$?

Resolução:

Seja $A = \mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$ e C a circunferência $|z+\mathrm{i}| = 1$ percorrida no sentido directo. Note que C está contida em A. Mas $\oint_C f(z)\,dz = -\pi\mathrm{i}\operatorname{sh} 2 \neq 0$, pelo caso 2 da alínea anterior. Assim, f não tem primitiva em A.

Seja agora B o conjunto $\mathbb{C} \setminus \big(\{\mathrm{i}\} \cup \{z = \mathrm{i}y : y \leq -1\}\big)$. Ora se C for qualquer curva de Jordan com $-\mathrm{i}$ no seu interior, C, intersecta necessariamente a semi-recta $\{z = \mathrm{i}y : y \leq -1\}$. Consequentemente, se C está contida em B então $-\mathrm{i} \in \operatorname{ext} C$. Pelo caso 1 da alínea anterior, $\oint_C f(z)\,dz = 0$; e como f é analítica (logo, contínua) em B, concluímos que f tem primitiva em B.

3. Considere as funções complexas f e g definidas nos seus domínios por

$$f(z) = \frac{e^{\pi z} - 1}{z^4 - 8\mathrm{i}z} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{3z}\right)$$

e

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n^n} z^{n+1}.$$

[1,5 val.] (a) Determine e classifique as singularidades de f. Calcule o valor de

$$\oint_\gamma f(z)\,dz$$

onde $\gamma = \{z : |z+\mathrm{i}| = \frac{2018}{2017}\}$ é percorrida uma vez no sentido directo.
Resolução:

Vamos considerar $f = f_1 + f_2$ com $f_1(z) = \frac{e^{\pi z}-1}{z^4-8\mathrm{i}z}$ e $f_2(z) = \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{3z}$. As singularidades de f_1 são as soluções de

$$\begin{aligned} z^4 - 8\mathrm{i}z = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z = 0 \;\vee\; z = \sqrt[3]{8\mathrm{i}} \\ &\Leftrightarrow \quad z = 0 \;\vee\; z = 2\exp\Big(\mathrm{i}\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\Big),\; k = 0,\,1,\,2 \\ &\Leftrightarrow \quad z = 0 \;\vee\; z = 2e^{\mathrm{i}\pi/6} \;\vee\; z = 2e^{\mathrm{i}5\pi/6} \;\vee\; z = -2\mathrm{i} \end{aligned}$$

Para classificar as singularidades:

- Utilizando a série de Maclaurin de $e^{\pi z}$, obtém-se

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^n}{n!}z^n - 1}{z(z^3-8\mathrm{i})} = \frac{\pi z + \frac{\pi^2}{2}z^2 + \frac{\pi^3}{3!}z^3 + \cdots}{z(z^3-8\mathrm{i})} \\ &= \frac{z\Big(\pi + \frac{\pi^2}{2}z + \frac{\pi^3}{3!}z^2 + \cdots\Big)}{z(z^3-8\mathrm{i})} = g(z) \end{aligned}$$

  sendo $g(z) = \frac{\pi + \frac{\pi^2}{2}z + \frac{\pi^3}{3!}z^2 + \cdots}{z^3-8\mathrm{i}}$ analítica em 0 (pois é o quociente de duas funções analíticas em 0: $\pi + \frac{\pi^2}{2}z + \frac{\pi^3}{3!}z^2 + \cdots$ trata-se de uma série de potências centrada em 0 e $z^3 - 8\mathrm{i}$ uma função polinomial) verificando $g(0) = \mathrm{i}\pi/8 \neq 0$. Conclui-se que 0 é uma **singularidade removível** de f_1.
- Atendendo a que a função $e^{\pi z} - 1$ não se anula nem em $2e^{\mathrm{i}\pi/6}$ nem em $2e^{\mathrm{i}5\pi/6}$, conjecturamos que ambas são pólos simples. De facto

$$\lim_{z\to 2e^{\mathrm{i}\pi/6}}\Big(z - 2e^{\mathrm{i}\pi/6}\Big)f_1(z) = \lim_{z\to 2e^{\mathrm{i}\pi/6}}\frac{e^{\pi z}-1}{z(z+2\mathrm{i})(z-2e^{\mathrm{i}5\pi/6})} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\,,$$

  e

$$\lim_{z\to 2e^{\mathrm{i}5\pi/6}}\Big(z - 2e^{\mathrm{i}5\pi/6}\Big)f_1(z) = \lim_{z\to 2e^{\mathrm{i}5\pi/6}}\frac{e^{\pi z}-1}{z(z+2\mathrm{i})(z-2e^{\mathrm{i}\pi/6})} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\,.$$

  Conclui-se que $2e^{\mathrm{i}\pi/6}$ e $2e^{\mathrm{i}5\pi/6}$ são **pólos de 1ª ordem** de f_1.
- Atendendo a que $e^{-2\pi\mathrm{i}} - 1 = 0$, conjecturamos que a singularidade $-2\mathrm{i}$ é removível. De facto

$$\begin{aligned} \lim_{z\to -2\mathrm{i}} f_1(z) &= \lim_{z\to -2\mathrm{i}}\frac{1}{z(z-2e^{\mathrm{i}\pi/6})(z-2e^{\mathrm{i}5\pi/6})}\lim_{z\to -2\mathrm{i}}\frac{e^{\pi z}-1}{z+2\mathrm{i}} \\ &= \frac{1}{(-2\mathrm{i}-2e^{\mathrm{i}\pi/6})(-2\mathrm{i}-2e^{\mathrm{i}5\pi/6})}\lim_{z\to -2\mathrm{i}}\pi e^{\pi z} \\ &= \frac{\pi}{(-2\mathrm{i}-2e^{\mathrm{i}\pi/6})(-2\mathrm{i}-2e^{\mathrm{i}5\pi/6})} \end{aligned}$$

  Conclui-se que $-2\mathrm{i}$ é uma **singularidade removível** de f_1.
- Quanto à função f_2, fazendo o seu desenvolvimento em série de Laurent centrado em 0, obtém-se

$$\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{3z} = \mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)!}z^{-2n-1} = \mathrm{i}\Big(\frac{1}{3z} - \frac{1}{3!3^3z^3} + \frac{1}{5!3^5z^5} + \cdots\Big)$$

válida em $A(0,0,+\infty) = \{z : 0 < |z| < \infty\}$. Verifica-se que a parte principal da série tem um número infinito de parcelas, pelo que se conclui que 0 é uma **singularidade essencial** de f_2.

Assim

- 0 é uma **singularidade essencial** de f ;
- $2e^{\mathrm{i}\pi/6}$ e $2e^{\mathrm{i}5\pi/6}$ são **pólos de 1ª ordem** de f ;
- $-2\mathrm{i}$ é uma **singularidade removível** de f.

Para calcular o valor do integral vamos usar o Teorema dos Resíduos. É fácil de verificar que

- 0 e $-2\mathrm{i}$ pertencem à região interior a γ ;
- $2e^{\mathrm{i}\pi/6}$ e $2e^{\mathrm{i}5\pi/6}$ não pertencem à região interior a γ .

Então

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi\mathrm{i}\Big(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,-2\mathrm{i})\Big)$$

Dado que 0 é removível de f_1 e essencial de f_2, tem-se que

$$\mathrm{Res}(f,0) = 0 + \mathrm{Res}(f_2,0) = \frac{\mathrm{i}}{3}\,.$$

Por outro lado, $-2\mathrm{i}$ é removível de f_1 e não é singularidade de f_2, tem-se que

$$\mathrm{Res}(f,-2\mathrm{i}) = \mathrm{Res}(f_1,-2\mathrm{i}) = 0\,.$$

Finalmente

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = -\frac{2\pi}{3}$$

[1,0 val.] (b) Calcule, justificando cuidadosamente, os integrais

$$\oint_\gamma g(z)\,dz \qquad \text{e} \qquad \oint_\gamma \frac{g(z)}{z^6}\,dz\,,$$

onde a curva é a mesma da alínea anterior.

Resolução:

A função $g(z)$ é definida por uma série de potências centrada em $z_0 = 0$, como tal é uma função analítica no disco de convergência $D = \{z : |z| < R\}$. O raio de convergência pode ser dado por

$$R = \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_n \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} = \lim_n (n-1)\left(\frac{n}{n-1}\right)^n =$$
$$= \lim_n (n-1)\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^n} = \infty.\frac{1}{e^{-1}} = \infty\,,$$

(observe-se que $a_n = \frac{i^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}$) pelo que se conclui que $D = \mathbb{C}$, ou seja a função $g(z)$ é inteira. Assim, por aplicação do Teorema de Cauchy

$$\oint_\gamma g(z)\,dz = 0$$

e por aplicação da Fórmula integral de Cauchy

$$\oint_\gamma \frac{g(z)}{z^6}\,dz = \frac{2\pi \mathrm{i}}{5!} g^{(5)}(0)\,.$$

Visto a função ser inteira, pode ser desenvolvida em série de Maclaurin

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad , \quad \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

Assim,

$$g^{(5)}(0) = 5!a_5 = 5!\frac{\mathrm{i}^4}{4^4}.$$

pelo que

$$\oint_\gamma \frac{g(z)}{z^6}\,dz = \frac{2\pi \mathrm{i}}{4^4} = \frac{\pi \mathrm{i}}{128}\,.$$

[1,5 val.] 4. Determine o valor do integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-2}{(x^2+1)^2} dx.$$

Resolução:

Para $z \in \mathbb{C}$, considere-se $f(z) = \dfrac{z-2}{(z^2+1)^2}$ e para cada $R \in \mathbb{R}^+$ a curva Γ_R como sendo a fronteira do semicírculo $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \le R\,,\ \operatorname{Im} z \ge 0\}$, percorrida no sentido positivo. Dado que as singularidades de f são i e $-\mathrm{i}$ e que apenas i está no interior de Γ_R (para $R > 1$), aplicando o teorema dos resíduos resulta que

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi \mathrm{i}\,\operatorname{Res}(f, \mathrm{i}).$$

Tendo em conta que

$$f(z) = \frac{z-2}{(z-\mathrm{i})^2(z+\mathrm{i})^2},$$

verifica-s que i e $-\mathrm{i}$ são pólos de ordem 2 da função $f(z)$. Assim:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, \mathrm{i}) &= \lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{d}{dz}\Big((z-\mathrm{i})^2 f(z)\Big) = \lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{d}{dz}\frac{z-2}{(z+\mathrm{i})^2} \\
&= \lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{(z+\mathrm{i})^2 - 2(z+\mathrm{i})(z-2)}{(z+\mathrm{i})^4} \\
&= \frac{-4-4\mathrm{i}(\mathrm{i}-2)}{(2\mathrm{i})^4} = \frac{8\mathrm{i}}{16} = \frac{\mathrm{i}}{2}
\end{aligned}$$

Concluímos que:

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{z-2}{(z^2+1)^2}\,dz = 2\pi \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{i}}{2} = -\pi.$$

Por outro lado $\Gamma_R = I_R + \gamma_R$, onde I_R é o intervalo $[-R, R] \subset \mathbb{R}$ e γ_R a semicircunferência parametrizada por $z(t) = Re^{it}$, com $t \in [0, \pi]$. Desta forma

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{z-2}{(z^2+1)^2}\,dz = \int_{I_R} \frac{z-2}{(z^2+1)^2}\,dz + \int_{\gamma_R} \frac{z-2}{(z^2+1)^2}\,dz,$$

ou seja,

$$-\pi = \int_{-R}^{R} \frac{x-2}{(x^2+1)^2}\,dx + \int_{\gamma_R} \frac{z-2}{(z^2+1)^2}\,dz.$$

Tomando o limite de ambos os membros da igualdade anterior quanto R tende para infinito:

$$-\pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-2}{(x^2+1)^2}\,dx + \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{z-2}{(z^2+1)^2}\,dz.$$

Visto que, para $|z| = R > 1$,

$$\begin{array}{rcccl} |z-2| & \leq & |z|+2 & \leq & R+2\,, \\ \left|(z^2+1)^2\right| & = & \left|z^2-1\right|^2 & \geq & (|z|^2-1)^2 = (R^2-1)^2 \end{array}$$

então

$$\left|\frac{z-2}{(z^2+1)^2}\right| \leq \frac{R+2}{(R^2-1)^2}.$$

Desta forma,

$$\begin{array}{rcl} \left|\int_{\gamma_R} \frac{z-2}{(z^2+1)^2} dz\right| & \leq & \int_{\gamma_R} \left|\frac{z-2}{(z^2+1)^2}\right| |dz| \\ & \leq & \frac{R+2}{(R^2-1)^2} \int_{\gamma_R} |dz| \quad = \quad \frac{(R+2)\pi R}{(R^2-1)^2} \quad \longrightarrow \quad 0 \end{array}$$

quando $R \to \infty$, o que mostra que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{z-2}{(z^2+1)^2} dz = 0.$$

Finalmente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-2}{(x^2+1)^2}\,dx = -\pi.$$

[1,0 val.] 5. Seja $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função analítica em $z_0 \in D$. Mostre que existe um $\delta > 0$ tal que a função $\frac{1}{f(z)}$ é analítica em $\{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$.

Resolução:

Começamos por notar que, sendo f analítica em z_0, então f é necessariamente analítica num disco $D(z_0, \eta)$ para algum $\eta > 0$.

Se $f(z_0) \neq 0$ então por continuidade de f existe um $\hat{\delta} > 0$ tal que se $z \in D(z_0, \hat{\delta})$ então $f(z) \neq 0$ (ver nota). Como f é analítica em $D(z_0, \eta)$, então $\frac{1}{f(z)}$ é analítica na intersecção destes dois discos, ou seja, em $D(z_0, \delta)$, com $\delta = \min(\hat{\delta}, \eta)$.

Se $f(z_0) = 0$, seja $p \in \mathbb{N}$ a ordem do zero de f em z_0. Então $f(z) = (z - z_0)^p F(z)$, onde F é analítica em z_0 e $F(z_0) \neq 0$. Por continuidade de F em z_0, existe $\hat{\delta} > 0$ tal que se $z \in D(z_0, \hat{\delta})$ então $F(z) \neq 0$ (ver nota). Como $f(z) = (z - z_0)^p F(z)$, então $f(z) \neq 0$ para $0 < |z - z_0| < \hat{\delta}$. Como f é analítica em $D(z_0, \eta)$, então $\frac{1}{f(z)}$ é analítica na intersecção destes dois conjuntos, ou seja, em $\{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$, com $\delta = \min(\hat{\delta}, \eta)$.

Nota: *Se $g : D \to \mathbb{C}$ é contínua em z_0 e $g(z_0) \neq 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $g(z) \neq 0$ em* $D(z_0, \delta)$. Pois tomando $\epsilon < |g(z_0)|$ na definição de continuidade, existe $\delta > 0$ tal que se $|z - z_0| < \delta$

então $|g(z) - g(z_0)| < \epsilon$. Desta forma, e desde que $z \in D(z_0, \delta)$:

$$|g(z_0)| = |g(z_0) - g(z) + g(z)| \leq \underbrace{|g(z_0) - g(z)|}_{=|g(z)-g(z_0)|<\epsilon} + |g(z)| < \epsilon + |g(z)|,$$

o que mostra que $|g(z)| > |g(z_0)| - \epsilon > 0$. Isto mostra que $g(z) \neq 0$ em $D(z_0, \delta)$. (O aluno poderia usar este resultado sem o demonstrar).