Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2009/2010

2º Teste - Versão A

(Cursos: LEIC-A, MEC, LEGM, LET)

19 de Dezembro de 2009

Duração: 1h 30m

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular.
- Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
- Este caderno de exame inclui duas folhas em branco no final, que poderá utilizar como rascunho ou para terminar outras respostas. Todo o caderno é para ser entregue no final da prova, pelo que não poderá rasgar ou arrancar essas folhas.

Pergunta	cotação	classificação
1)	1,5	
2)	1.5	
3) a)	1,0	
3) b)	1,5	
3) c)	1,0	
4) a)	1,0	
4) b)	1,5	
5)	1	
Total	10	

Nome: ______________________________

Nº: ____________________ **Sala:** __________

Curso: ____________________ **Rúbrica (DOCENTE):**

[1,5 val.] 1. Resolva o seguinte problema de valor inicial, determinando a sua solução na forma explícta e indicando o seu intervalo máximo de existência:

$$(xy^2 - 2x) - (x^3 + 2yx^2)y' = 0 \qquad , \qquad y(-2) = -2.$$

Sugestão: Utilize um factor integrante da forma $\mu(x)$.

[1,5 val.] 2. Considere o problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \qquad , \qquad \mathbf{x}(2) = (0, -1, 1)$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine a matriz e^{At} e indique a solução do problema.

3. Considere a equação diferencial

$$y'' + y = b(x) \qquad (1)$$

em que $b(x)$ é uma função contínua.

[1,0 val.] (a) Determine a solução geral da equação homogénea associada.

[1,5 val.] (b) Considere

$$b(x) = 2x - 1 - 2\cos x\ .$$

Determine a solução de (1) que verifica as condições iniciais $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

[1,0 val.] (c) Determine uma solução particular de (1) no caso em que $b(x) = \dfrac{-2}{\cos x}$.

4. Considere o problema de valores na fronteira e valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (3t^2)u & x \in]0, \pi[\ ,\ t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = f(x) & x \in [0, \pi] \end{cases} \qquad (2)$$

em que $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ é definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ x & \text{se } x \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

[1,0 val.] (a) Determine a série de Fourier de cosenos de f e indique a sua soma para cada valor de $x \in \mathbb{R}$.

[1,5 val.] (b) Resolva o problema (2).

[1,0 val.] 5. Seja y a solução do problema de valor inicial

$$y' = t(1 + y^2)(\text{sen}\, y + 3) \qquad , \qquad y(0) = 1\ .$$

Mostre que o intervalo máximo de existência de y é da forma $]a, b[$, em que a e b são reais verificando $a < 0 < b$.