Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE COMPLEXA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

TESTE 2B - 15 DE JUNHO DE 2009 - DAS 11H ÀS 12:30H

Apresente e justifique todos os cálculos

[1,5 val.] 1. Determine explicitamente a solução do seguinte problema de valor inicial, indicando o intervalo máximo de definição da solução.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} + \frac{t}{y}; \qquad y(1) = -1.$$

Sugestão: Faça a substituição $v = \frac{y}{t}$.

[1,5 val.] 2. Determine a solução geral do sistema

$$\begin{cases} x' = -2x - y \\ y' = 2x + y. \end{cases}$$

3. Considere a equação

$$y'' + 2y = g(t).$$

[1,0 val.] (a) Determine a solução geral da equação homogénea associada.

[1,5 val.] (b) Resolva o problema de valor inicial dado por $g(t) = \dfrac{1}{\cos\sqrt{2}t}; y(1) = 0; y'(1) = 1.$

[1,0 val.] (c) Resolva o problema de valor inicial determinado por $g(t) = \delta(t-3); y(0) = y'(0) = 0.$

4. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ -1 & \text{se } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

[1,0 val.] (a) Determine a série de senos de $f(x)$ indicando os valores para os quais converge a série obtida.

[1,5 val.] (b) Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u, \quad (0 < x < 2, t \geq 0) \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0. \end{cases}$$

[1,0 val.] 5. Mostre que se $f : [0,l] \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^k com $k \geq 1$ e $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(l) = 0$ para $0 \leq j \leq k-1$ então existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$|b_n| \leq \frac{C}{n^k}$$

com b_n os coeficientes do desenvolvimento de f em série de senos.