Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE COMPLEXA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

TESTE 2A - 15 DE JUNHO DE 2009 - DAS 11H ÀS 12:30H

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Determine explicitamente a solução do seguinte problema de valor inicial, indicando o intervalo máximo de definição da solução:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} - \frac{t}{y}; \qquad y(1) = 1.$$

Sugestão: Faça a substituição $v = \frac{y}{t}$.

Resolução: Seguindo a sugestão, faz-se a substituição $y(t) = t\,v(t)$. Então $y'(t) = v(t) + tv'(t)$. Donde a equação passa a escrever-se, para a nova incógnita $v(t)$, como

$$\begin{aligned} v + tv' &= v - \frac{1}{v} \\ \Leftrightarrow tv' &= -\frac{1}{v} \\ \Leftrightarrow vv' &= -\frac{1}{t}, \end{aligned}$$

ou seja, obtivemos uma equação separável na qual o lado esquerdo pode ser visto como a derivada, em ordem a t, de $v^2/2$,

$$\frac{d}{dt}\frac{v(t)^2}{2} = -\frac{1}{t}.$$

Para integrá-la e obter a solução $v(t)$ usaremos desde já a condição inicial. Em termos da nova função v ela escreve-se $v(1) = \frac{y(1)}{1} = 1$, pelo que a integração da equação separável se faz:

$$\begin{aligned} \int_1^t \frac{d}{ds}\frac{v(s)^2}{2}\,ds &= \int_1^t -\frac{1}{s}\,ds \\ \Leftrightarrow \frac{v(t)^2}{2} - \frac{v(1)^2}{2} &= \log 1 - \log t \\ \Leftrightarrow \frac{v(t)^2}{2} &= \frac{1}{2} - \log t \\ \Leftrightarrow v(t)^2 &= 1 - \log(t^2). \end{aligned}$$

Para obter a expressão *explícita* para $v(t)$ há que resolver esta equação. Duas funções se obtêm: $\pm\sqrt{1 - \log(t^2)}$. Mas como a condição inicial, em $t = 1$, corresponde a uma solução $v(1) = 1$ com valor positivo, destas duas funções $v(t)$ só poderá ser a que tem sinal positivo, pelo que

$$v(t) = \sqrt{1 - \log(t^2)}.$$

Finalmente, há que desfazer a substituição inicial para obter explícitamente a solução $y(t)$ que procuramos, ou seja

$$y(t) = tv(t) = t\sqrt{1 - \log(t^2)}.$$

O intervalo máximo de definição é obtido procurando o maior intervalo aberto que contém o instante inicial $t = 1$ e onde a função é continuamente diferenciável, o que, no nosso caso, é dado pelas restrições $t \neq 0$ e $1 - \log(t^2) > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \log(t^2) &< 1 \\ \Leftrightarrow t^2 &< e \quad (t \neq 0), \end{aligned}$$

e concluimos finalmente que o intervalo máximo de definição desta solução é $]0, \sqrt{e}[$.

2. Determine a solução geral do sistema

$$\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = -3x - y. \end{cases}$$

Resolução: A matriz do sistema

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

tem como valores próprios as soluções da equação

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

As soluções são $\lambda = 2$ e $\lambda = 1$ logo a matriz A é diagonalizável. Os vectores próprios associados ao valor próprio 2 são as soluções da equação

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow b = -a.$$

ou seja, os múltiplos do vector $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Os vectores próprios associados ao valor próprio 1 são as soluções da equação

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow b = -\frac{3}{2}a.$$

ou seja, os múltiplos do vector $\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

Conclui-se portanto que a solução geral do sistema é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3. Considere a equação

$$y'' + 4y = g(t).$$

(a) Determine a solução geral da equação homogénea associada.

(b) Resolva o problema de valor inicial dado por $g(t) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 2t}; y(2) = 1; y'(2) = 0$.

(c) Resolva o problema de valor inicial determinado por $g(t) = \delta(t-1); y(0) = y'(0) = 0$.

Resolução:

(a) A equação homogénea pode escrever-se $(D^2+4)y = 0 \Leftrightarrow (D+2i)(D-2i)y = 0$ e tem portanto solução geral $y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t$ com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Tendo em conta a resposta à alínea anterior, a matriz Wronskiana da equação é dada por

$$W(t) = \begin{bmatrix} \cos 2t & \operatorname{sen} 2t \\ -2\operatorname{sen} 2t & 2\cos 2t \end{bmatrix}$$

que tem inversa

$$W^{-1}(t) = \frac{1}{2\cos^2(2t) + 2\operatorname{sen}^2(2t)} \begin{bmatrix} 2\cos 2t & -\operatorname{sen} 2t \\ 2\operatorname{sen} 2t & \cos 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2t & -\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t \\ \operatorname{sen} 2t & \frac{1}{2}\cos 2t \end{bmatrix}.$$

A fórmula da variação das constantes diz-nos então que a solução do problema de valor inicial é dada por

$$\begin{aligned}
y(t) &= \left[\cos 2t \operatorname{sen} 2t\right] W^{-1}(2) \begin{bmatrix} y(2) \\ y'(2) \end{bmatrix} + \left[\cos 2t \operatorname{sen} 2t\right] \int_2^t W^{-1}(s) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\operatorname{sen} 2s} \end{bmatrix} ds \\
&= \left[\cos 2t \operatorname{sen} 2t\right] \begin{bmatrix} \cos 4 \\ \operatorname{sen} 4 \end{bmatrix} + \left[\cos 2t \quad \operatorname{sen} 2t\right] \int_2^t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\cos 2s}{2\operatorname{sen} 2s} \end{bmatrix} ds \\
&= \cos(2t)\cos 4 + \operatorname{sen}(2t)\operatorname{sen} 4 + \left[\cos 2t \quad \operatorname{sen} 2t\right] \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(t-2) \\ \frac{1}{4}\log|\operatorname{sen} 2s|\Big|_2^t \end{bmatrix} \\
&= \cos(2t-4) - \frac{1}{2}(t-2)\cos(2t) + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t(\log|\operatorname{sen} 2t| - \log|\operatorname{sen} 4|).
\end{aligned}$$

(c) Aplicando a transformada de Laplace à equação e denotando como habitualmente a transformada de Laplace da função $y(t)$ por $Y(s)$ temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y'') + 4\mathcal{L}(y) &= \mathcal{L}(\delta(t-1)) \\
s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4Y(s) &= e^{-s} \\
(s^2+4)Y(s) &= e^{-s} \\
Y(s) &= \frac{e^{-s}}{s^2+4}.
\end{aligned}$$

Conclui-se portanto que a solução do problema de valor inicial é

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s^2+4}\right) \\
&= H(t-1)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)(t-1) \\
&= \frac{1}{2}H(t-1)\operatorname{sen}(2(t-1)).
\end{aligned}$$

onde $H(t)$ designa como habitualmente a função de Heaviside.

4. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{se } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

(a) Determine a série de senos de $f(x)$ indicando os valores para os quais converge a série obtida.

(b) Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u, \quad (0 < x < 2, t \geq 0) \\ u(0,t) = u(2,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0. \end{cases}$$

Resolução:

(a) Para obter a sére de Fourier de senos da função dada, com $x \in [0,2]$ é necessário fazer o prolongamento ímpar desta função ao intervalo $[-2,0]$ (os valores das funções nos extremos destes intervalos são indiferentes, porque não modificam os valores dos integrais envolvidos nas fórmulas dos coeficientes).
Devido ao prolongamento ímpar, os coeficientes dos cosenos anulam-se e os coeficientes dos senos passam apenas a ser dados por

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Neste nosso caso $L = 2$ pelo que a fórmula anterior reduz-se a

$$\int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \left[-\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right).$$

Assim, a série de Fourier de senos da função $f(x)$ dada é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Visto que o prolongamento ímpar da função f é seccionalmente $C^1[-2,2]$, então sabe-se que em $\mathbb{R}$ a série converge para uma função periódica, de período 4, a qual, em cada $x \in [-2,2]$, é igual à média dos limites laterais do prolongamento ímpar de f nesse ponto, ou seja

$$\begin{cases} 0 \text{ se } -2 \leq x < -1 \\ -\frac{1}{2} \text{ se } x = -1 \\ -1 \text{ se } -1 < x < 0 \\ 0 \text{ se } x = 0 \\ 1 \text{ se } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} \text{ se } x = 1 \\ 0 \text{ se } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

(b) Como sempre, começamos por procurar soluções não triviais (ou seja, não nulas) por separação de variáveis, ou seja, da forma $X(x)T(t)$. Substituindo na equação obtemos:

$$\begin{aligned} X(x)T''(t) &= X''(x)T(t) + X(x)T(t) \\ \frac{T''(t)}{T(t)} &= \frac{X''(x)}{X(x)} + 1. \end{aligned}$$

Agora, duas funções de variáveis independentes diferentes - neste caso t e x - só podem ser iguais se forem ambas constantes, pelo que se tem

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda \qquad \text{e} \qquad \frac{X''(x)}{X(x)} + 1 = -\lambda.$$

Daqui resultam duas equações diferenciais ordinárias, para $T(t)$ e $X(x)$, sendo que as condições de fronteira $u(0,t) = u(2,t) = 0$ são incorporadas na escolha das funções $X(x)$ de modo a satisfazerem $X(0) = 0$ e $X(2) = 0$. Assim, temos que procurar soluções não nulas dos problemas

$$\begin{cases} T''(t) + \lambda T(t) = 0 \\ X''(x) + (\lambda+1)X(x) = 0, \qquad X(0) = X(2) = 0. \end{cases}$$

O problema de valores próprios e funções próprias

$$X''(x) + (\lambda+1)X(x) = 0, \qquad X(0) = X(2) = 0,$$

foi já exaustivamente estudado nas aulas. Há que procurar soluções não nulas $X(x)$ satisfazendo as condições de fronteira impostas, sendo para isso necessário estudar separadamente os três casos $\lambda+1 < 0$,$\lambda+1 = 0$ e $\lambda+1 > 0$ visto as soluções da equação de segunda ordem serem diferentes, consoante estes casos. Sabemos, do mesmo estudo feito nas aulas, que com as condições de fronteira nulas os casos $\lambda+1 < 0$ e $\lambda+1 = 0$ apenas dão soluções triviais. Já para $\lambda+1 > 0$, em que a solução geral da equação é $X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda+1}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda+1}x)$, substituindo nas condições de fronteira $X(0) = X(2) = 0$, verifica-se que para os valores de λ discretos

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{2} - 1, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

se têm as soluções não triviais

$$X_n(x) = \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Usando estes valores λ_n na equação de segunda ordem, para $T(t)$,

$$T_n''(t) + \left(\frac{n^2\pi^2}{2} - 1\right)T_n(t) = 0,$$

e como para qualquer $n \geq 1$ os termos $\frac{n^2\pi^2}{2} - 1$ são positivos, obtém-se a solução geral

$$T_n(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{2} - 1}\, t\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{2} - 1}\, t\right).$$

Determinaram-se assim todas as soluções não triviais, da forma $X(x)T(t)$, que satisfazem a equação diferencial parcial e as condições de fronteira:

$$X_n(x)T_n(t) = A\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{2} - 1}\, t\right) + \\ + B\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{2} - 1}\, t\right).$$

Finalmente, fazem-se as combinações lineares infinitas de todas estas soluções de modo a satisfazer as condições iniciais.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{2}-1}\,t\right)+$$
$$+\,b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{2}-1}\,t\right).$$

A condições iniciais em $t=0$ são duas, porque a equação envolve duas derivadas parciais na variável t. Temos que começar por satisfazer $u(x,0)=f(x)$ donde, pela fórmula anterior da solução se tem:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)=f(x),$$

concluindo-se que os coeficientes a_n são os coeficientes da série de Fourier de senos para $f(x)$, já obtidos na alínea anterior. Assim

$$a_n=\frac{2}{n\pi}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right).$$

Para a outra condição inicial em $t=0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$, derivando a nossa solução $u(x,t)$ acima, em ordem a t, e substituindo $t=0$, obtém-se

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{2}-1}\right) b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)=0,$$

de onde se conclui trivialmente que todos os $b_n=0$.
A solução final do problema é então dada por

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{2}-1}\,t\right).$$

5. Mostre que se $f:[0,l]\to\mathbb{R}$ é uma função de classe C^k com $k\geq 1$ e $f^{(j)}(0)=f^{(j)}(l)=0$ para $0\leq j\leq k-1$ então existe uma constante $C\in\mathbb{R}$ tal que

$$|b_n|\leq\frac{C}{n^k}$$

com b_n os coeficientes do desenvolvimento de f em série de senos.

Resolução: Os coeficientes do desenvolvimento de f em série de senos são dados por

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx.$$

Como f é de classe C^k podemos integrar por partes k vezes. Em cada integração por partes surge um termo n no denominador. Por exemplo, na primeira integração por partes:

$$\begin{aligned}\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx &= \frac{2}{n\pi}\left(\left[-f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]_0^l+\int_0^l f'(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\right)\\ &= \frac{2}{n\pi}\int_0^l f'(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx,\end{aligned}$$

onde usámos as condições de fronteira dadas, para as derivadas de f nos extremos do intervalo, na última igualdade.

Agora, como o intervalo é limitado e fechado e a função tem derivada contínua, o integral é limitado por uma constante *independente de* n:

$$\left| \int_0^l f'(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \right| \leq \int_0^l |f'(x)| dx,$$

pelo que se tem então:

$$|b_n| \leq \frac{C}{n},$$

com

$$C = \frac{2 \int_0^l |f'(x)| dx}{\pi}.$$

Repetindo exactamente este procedimento de integração por partes, k vezes, no caso de uma função ser de classe C^k, obtém-se o resultado pedido.