

ANÁLISE COMPLEXA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

TESTE 2A - 15 DE JUNHO DE 2009 - DAS 11H ÀS 12:30H

Apresente e justifique todos os cálculos

- [1,5 val.] 1. Determine explicitamente a solução do seguinte problema de valor inicial, indicando o intervalo máximo de definição da solução:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} - \frac{t}{y}; \quad y(1) = 1.$$

Sugestão: Faça a substituição $v = \frac{y}{t}$.

- [1,5 val.] 2. Determine a solução geral do sistema

$$\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = -3x - y. \end{cases}$$

3. Considere a equação

$$y'' + 4y = g(t).$$

- [1,0 val.] (a) Determine a solução geral da equação homogénea associada.

- [1,5 val.] (b) Resolva o problema de valor inicial dado por $g(t) = \frac{1}{\sin 2t}$; $y(2) = 1$; $y'(2) = 0$.

- [1,0 val.] (c) Resolva o problema de valor inicial determinado por $g(t) = \delta(t-1)$; $y(0) = y'(0) = 0$.

4. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{se } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

- [1,0 val.] (a) Determine a série de senos de $f(x)$ indicando os valores para os quais converge a série obtida.

- [1,5 val.] (b) Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u, & (0 < x < 2, t \geq 0) \\ u(0, t) = u(2, t) = 0, \\ u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0. \end{cases}$$

- [1,0 val.] 5. Mostre que se $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^k com $k \geq 1$ e $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(l) = 0$ para $0 \leq j \leq k - 1$ então existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$|b_n| \leq \frac{C}{n^k}$$

com b_n os coeficientes do desenvolvimento de f em série de senos.