Análise Complexa e Equações Diferenciais
1º Semestre 2009/2010

1º Teste - Versão B

Cursos: LEIC-A, MEAer, MEMec, LEAN, MEC, LEGM, LET

Justifique cuidadosamente as respostas apresentando todos os cálculos.

Data: 7 de Novembro de 2009 - das 13h às 14:30h
Duração: 1h30.

1. Seja $u(x,y) = e^{-y}\operatorname{sen}(x) - x^2y + \beta(y)$, em que $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^2(\mathbb{R})$.

[1.0] (a) Determine a forma geral de $\beta(y)$ de modo a que u seja a parte real duma função holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

[1.0] (b) Considerando $\beta(y) = \frac{y^3}{3} - y$, calcule a função f holomorfa em $\mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(f) = u$ e $f(0) = -\mathrm{i}$.

[1.0] (c) Calcule $\displaystyle\oint_{|z|=2009} \frac{f(z)}{(z+\mathrm{i})^2}\,dz$, onde a curva é percorrida uma vez em sentido directo.

2. Considere a função $f(z) = \dfrac{1}{2+z}$, definida em $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$.

[1.5] (a) Determine o desenvolvimento de f em série de Taylor na região $|z+\mathrm{i}| < \sqrt{5}$, e o desenvolvimento de Laurent na região $|z+\mathrm{i}| > \sqrt{5}$.

[0.5] (b) Aproveite o resultado da alínea anterior para determinar $f^{(7)}(-\mathrm{i})$.

[1.5] 3. Calcule
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)+1}{5+4\operatorname{sen}(x)}\,dx.$$

4. Considere a função
$$f(z) = \frac{e^z - z - 1}{(z^2-1)z^2} + z^4 \operatorname{sen}\frac{1}{z}$$

[1.0] (a) Determine e classifique todas as singularidades de f.

[1.5] (b) Calcule
$$\oint_{|2z-1|=2} f(z)\,dz.$$

[1.0] 5. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ inteira tal que $f(3z) = 3f(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Mostre que existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = az$, $\forall z \in \mathbb{C}$.