Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2009/2010

1º Teste - Versão A

Cursos: LEIC-A, MEAer, MEMec, LEAN, MEC, LEGM, LET

Justifique cuidadosamente as respostas apresentando todos os cálculos.

Data: 7 de Novembro de 2009 - das 13h às 14:30h
Duração: 1h30.

1. Seja $u(x,y) = xy^2 + e^{-y}\cos(x) + \alpha(x)$, em que $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^2(\mathbb{R})$.

[1.0] (a) Determine a forma geral de $\alpha(x)$ de modo a que u seja a parte real duma função holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Resolução: Como a função $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $\mathbb{R}^2$ é um domínio simplesmente conexo, ela é parte real duma função f holomorfa em todo o domínio $\mathbb{C}$ se e só se for harmónica, isto é, $\Delta u = 0$.
Mas

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x + \alpha''(x),$$

donde a condição $\Delta u = 0$ é equivalente a

$$2x + \alpha''(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha''(x) = -2x,$$

a qual, primitivando duas vezes, dá

$$\alpha(x) = -\frac{x^3}{3} + Ax + B,$$

com $A, B \in \mathbb{R}$, constantes arbitrárias reais.

[1.0] (b) Considerando $\alpha(x) = -\frac{x^3}{3} + x$, calcule a função f holomorfa em $\mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(f) = u$ e $f(0) = 1 + \mathrm{i}$.

Resolução: Esta função é um caso particular específico da família de funções $\alpha(x)$ possíveis (com $A = 1$ e $B = 0$), determinadas na alínea anterior. Tem-se portanto

$$u(x,y) = xy^2 + e^{-y}\cos(x) - \frac{x^3}{3} + x.$$

Como $f = u + \mathrm{i}v$ é holomorfa, a sua parte real $u = \operatorname{Re} f$ e imaginária $v = \operatorname{Im} f$ satisfazem necessariamente as equações de Cauchy-Riemann,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Substituindo a função conhecida u na primeira desta equações, e primitivando em ordem a y obtém-se

$$v(x,y) = \int (y^2 - e^{-y}\operatorname{sen}(x) - x^2 + 1)\, dy = \frac{y^3}{3} + e^{-y}\operatorname{sen}(x) - x^2 y + y + c(x).$$

Resta apenas determinar a função $c(x)$ para se conhecer completamente a função $v(x,y)$, e consequentemente f. Para isso, substituem-se a função u dada e a v, agora obtida, na segunda das equações de Cauchy-Riemann

$$2xy - e^{-y}\cos(x) = -e^{-y}\cos(x) + 2xy + c'(x),$$

donde se conclui que $c'(x) = 0$, ou seja que a função $c(x)$ é constante $c(x) = C \in \mathbb{R}$. Para terminar, é ainda necessário determinar o valor de C de modo a que seja satisfeita a condição imposta, ou seja, que $f(0) = 1 + \mathrm{i}$. Mas esta condição é o mesmo que $v(0,0) = 1$, donde $C = 1$ e assim, finalmente, se tem

$$f(z) = f(x+\mathrm{i}y) = \Big(xy^2 + e^{-y}\cos(x) - \frac{x^3}{3} + x\Big) + \mathrm{i}\Big(\frac{y^3}{3} + e^{-y}\operatorname{sen}(x) - x^2 y + y + 1\Big).$$

[1.0] (c) Calcule $\displaystyle\oint_{|z|=2009} \frac{f(z)}{(z-\mathrm{i})^2}\, dz$, onde a curva é percorrida uma vez em sentido directo.

Resolução: A função f é inteira. Em particular é holomorfa sobre a circunferência de raio 2009 centrada na origem, assim como em todos os pontos do seu interior. E, obviamente, o ponto $z_0 = i$ está no seu interior. Pelo que estão satisfeitas as condições para a aplicação da fórmula integral de Cauchy, para a primeira derivada de f:

$$\oint_{|z|=2009} \frac{f(z)}{(z-\mathrm{i})^2}\, dz = 2\pi \mathrm{i} f'(\mathrm{i}).$$

Resta-nos, portanto, calcular a derivada de f no ponto i. Observe-se como é suficiente o conhecimento da parte real u da função f para calcular a derivada f', pelo que não é necessário ter-se resolvido a alínea b) para responder a esta alínea c). Assim,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} = \Big(y^2 - e^{-y}\operatorname{sen}(x) - x^2 + 1\Big) - \mathrm{i}\Big(2xy - e^{-y}\cos(x)\Big),$$

pelo que $f'(\mathrm{i}) = 2 + \mathrm{i}\, e^{-1}$ e, portanto

$$\oint_{|z|=2009} \frac{f(z)}{(z-\mathrm{i})^2}\, dz = -2\pi e^{-1} + 4\pi \mathrm{i}.$$

2. Considere a função $f(z) = \dfrac{1}{2-z}$, definida em $\mathbb{C} \setminus \{2\}$.

[1.5] (a) Determine o desenvolvimento de f em série de Taylor na região $|z - \mathrm{i}| < \sqrt{5}$, e o desenvolvimento de Laurent na região $|z - \mathrm{i}| > \sqrt{5}$.

Resolução: A função f é diferenciável em todo o seu domínio $\mathbb{C} \setminus \{2\}$, por ser uma função racional. Tendo apenas, portanto, uma única singularidade (necessariamente isolada, por ser única) no ponto $z = 2$ em que o denominador se anula e a função não está definida.

Assim, centrando o desenvolvimento em série de potências no ponto $z_0 = \mathrm{i}$, o teorema de Taylor garante a convergência da correspondente série, e a igualdade dela à função f, na maior bola centrada nesse ponto e contida dentro do domínio de diferenciabilidade da função, ou seja, até (pelo menos) atingir a singularidade em $z = 2$. A distância entre os dois pontos $|2 - \mathrm{i}| = \sqrt{5}$ é, portanto, um limite inferior do raio de convergência da série de Taylor pedida.

Para obtê-la basta escrever a função dada como uma série geométrica

$$
\begin{aligned}
f(z) = \frac{1}{2-z} &= \frac{1}{2-\mathrm{i}-z+\mathrm{i}} = \frac{1}{2-\mathrm{i}}\left(\frac{1}{1-\frac{z-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}}\right) \\
&= \frac{1}{2-\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2-\mathrm{i})^{n+1}}(z-\mathrm{i})^n.
\end{aligned}
$$

Sendo uma série geométrica, esta série converge se e só se o módulo da razão for inferior a 1, ou seja, quando

$$
\left|\frac{z-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-\mathrm{i}| < \sqrt{5},
$$

tal como previsto atrás pelo teorema de Taylor.

Analogamente, a região $|z - \mathrm{i}| > \sqrt{5}$ trata-se agora do maior anel de diferenciabilidade no exterior da singularidade, e ainda centrado em $z_0 = \mathrm{i}$, onde é desta feita válido o desenvolvimento (único) em série de Laurent

$$
\begin{aligned}
f(z) = \frac{1}{2-z} &= \frac{1}{2-\mathrm{i}-z+\mathrm{i}} = -\frac{1}{z-\mathrm{i}}\left(\frac{1}{1-\frac{2-\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}}\right) \\
&= -\frac{1}{z-\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2-\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}-(2-\mathrm{i})^n\frac{1}{(z-\mathrm{i})^{n+1}},
\end{aligned}
$$

o qual, sendo de novo uma série geométrica, é agora convergente para

$$
\left|\frac{2-\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-\mathrm{i}| > \sqrt{5},
$$

como desejado.

[0.5] (b) Aproveite o resultado da alínea anterior para determinar $f^{(7)}(\mathrm{i})$.

Resolução: Sendo único o desenvolvimento duma função em série de potências centradas num ponto de diferenciabilidade, o coeficiente da sétima potência de $(z-\mathrm{i})$ na série anterior é necessariamente o correspondente coeficiente $f^{(7)}(\mathrm{i})/7!$ da sua série de Taylor. Portanto,

$$\frac{f^{(7)}(\mathrm{i})}{7!} = \frac{1}{(2-\mathrm{i})^8} \Leftrightarrow f^{(7)}(\mathrm{i}) = \frac{7!}{(2-\mathrm{i})^8}.$$

[1.5] 3. Calcule

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\mathrm{sen}(x)}{5-4\cos(x)} dx.$$

Resolução: Atendendo a que

$$\mathrm{sen}\, x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2\mathrm{i}} \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},$$

podemos escrever:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\mathrm{sen}(x)}{5-4\cos(x)} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2\mathrm{i}}}{5-4\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}} dx.$$

Considerando $z = e^{ix}$ para $-\pi \leq x \leq \pi$ (o que significa que $z(x)$ é uma parametrização da curva $|z| = 1$ percorrida uma vez no sentido directo e $\frac{dz}{dx} = \mathrm{i}z$), obtém-se:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1+\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}}{5-4\frac{z+z^{-1}}{2}} \frac{dz}{\mathrm{i}z} = \frac{1}{2} \oint_{|z|=1} \frac{(z+\mathrm{i})^2}{z(2z^2-5z+2)} dz.$$

A função

$$f(z) = \frac{(z+\mathrm{i})^2}{z(2z^2-5z+2)}$$

é uma função racional e consequentemente holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{z : z(2z^2-5z+2) = 0\} = \mathbb{C} \setminus \{0, \frac{1}{2}, 2\}$. Aplicando o teorema dos resíduos:

$$I = \frac{1}{2} 2\pi\mathrm{i} \left(\mathrm{Res}(f, \frac{1}{2}) + \mathrm{Res}(f, 0) \right).$$

Atendendo a que, por factorização do polinómio do denominador de f,

$$f(z) = \frac{(z+\mathrm{i})^2}{z\left(2(z-\frac{1}{2})(z-2)\right)}$$

é fácil de concluir que ambas as singularidades são polos simples e

$$\operatorname{Res}(f, \frac{1}{2}) = \lim_{z \to \frac{1}{2}} (z - \frac{1}{2}) f(z) = \frac{1}{2} - \frac{2\mathrm{i}}{3}$$

e

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} z f(z) = -\frac{1}{2}$$

Conclui-se que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \operatorname{sen}(x)}{5 - 4\cos(x)} dx = \frac{2\pi}{3}.$$

4. Considere a função

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2(z^2+1)} + z^3 \cos\frac{1}{z}$$

[1.0] (a) Determine e classifique todas as singularidades de f.

Resolução: Considere-se

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2(z^2+1)} + z^3 \cos\frac{1}{z} \equiv f_1(z) + f_2(z)$$

A função $f_1(z)$ é um quociente de funções inteiras, pelo que as suas singularidades são os zeros do denominador, i.e.

$$z^2(z^2+1) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = 0 \ \text{ ou } \ z = \pm\mathrm{i}$$

Observe-se que

$$f_1(z) = \frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}}{z^2(z^2+1)} = \frac{\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \ldots}{z(z^2+1)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \ldots}{(z^2+1)}$$

pelo que

$$\lim_{z \to 0} f_1(z) = \frac{1}{2}$$

concluindo-se que 0 é uma singularidade removível de f_1. Por outro lado, atendendo a que

$$f_1(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}$$

é fácil de concluir que

$$\lim_{z \to \mathrm{i}} (z - \mathrm{i}) f_1(z) = \frac{1 - \cos \mathrm{i}}{2} \qquad \text{e} \qquad \lim_{z \to -\mathrm{i}} (z + \mathrm{i}) f_1(z) = \frac{1 - \cos \mathrm{i}}{2}$$

concluindo-se que tanto i como $-\mathrm{i}$ são pólos de primeira ordem de f_1.

A função f_2 é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e, aparentemente, a singularidade $z = 0$ é essencial. Podemos confirmar isto desenvolvendo f_2 em série de Laurent centrada em 0; assim obtém-se, para todo o z verificando $0 < |z| < \infty$:

$$z^3 \cos\frac{1}{z} = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{-2n}}{(2n)!} = z^3\Big(1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{6!z^6} + \ldots\Big) = z^3 - \frac{z}{2} + \frac{1}{4!z} - \frac{1}{6!z^3} + \ldots$$

Observa-se que a parte principal da série, $\frac{1}{4!z} - \frac{1}{6!z^3} + \ldots$ tem uma infinidade de termos não nulos, o que confirma que 0 é singularidade essencial de f_2.

Conclusão: as singularidades de f são 0, que é uma singularidade essencial, e $\pm\mathrm{i}$ que são pólos simples.

[1.5] (b) Calcule

$$\oint_{|2z-\mathrm{i}|=2} f(z)\, dz.$$

Resolução: Sendo f uma função com um número finito de singularidades isoladas podemos aplicar o teorema dos resíduos para determinar o valor do integral. Dado que

$$|2z - \mathrm{i}| = \left|2\Big(z - \frac{\mathrm{i}}{2}\Big)\right| = 2\Big|z - \frac{\mathrm{i}}{2}\Big|,$$

resulta que $|2z - \mathrm{i}| = 2 \Leftrightarrow |z - \mathrm{i}/2| = 1$, ou seja, $|2z - \mathrm{i}| = 2$ é uma circunferência centrada em $\mathrm{i}/2$ e de raio 1. Desta forma, 0 e i estão no interior de $|2z - \mathrm{i}| = 2$, e $-\mathrm{i}$ no exterior de $|2z - \mathrm{i}| = 2$.

Consequentemente:

$$\oint_{|2z-\mathrm{i}|=2} f(z)\, dz = 2\pi\mathrm{i}\big(\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f,\mathrm{i})\big) = 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{4!} + \frac{1-\cos\mathrm{i}}{2}\right)$$

$$= \mathrm{i}\pi\left(\frac{13}{12} - \frac{e^{-1}+e}{2}\right)$$

(onde os resíduos foram obtidos utilizando os cálculos da alínea (a)).

[1.0] 5. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ inteira tal que $f(2z) = 2f(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Mostre que existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = az$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Resolução: Como a função f é inteira, o teorema de Taylor garante que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, para qualquer $z \in \mathbb{C}$, sendo os coeficientes a_n univocamente determinados por f. Dado $z \in \mathbb{C}$, temos por hipótese que $f(2z) = 2f(z)$, pelo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (2z)^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

o que (pela propriedade de linearidade das séries convergentes) é equivalente a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n z^n.$$

Como o desenvolvimento em série de Taylor da função $f(2z)$ (em torno de $z = 0$) é único temos que, para todo o $n \in \mathbb{N}$:

$$2^n a_n = 2a_n \Leftrightarrow 2\left(2^{n-1} - 1\right) a_n = 0 \Leftrightarrow n = 1 \vee a_n = 0$$

Assim sendo, $a_n = 0$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$ (mas a_1 pode tomar qualquer valor em $\mathbb{C}$). Em conclusão:

$$f(z) = a_1 z \qquad\qquad \text{para qualquer} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Resolução Alternativa: Como a função f é inteira, o teorema de Taylor garante que f pode ser desenvolvida em série de potências centradas na origem, com raio de convergência infinto

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Usamos agora a condição dada para mostrar que todos os coeficientes são nulos, à excepção de $n = 1$.

Com efeito, por exemplo logo para $n = 0$ temos $f(2 \times 0) = f(0) = 2f(0)$, donde se conclui que necessariamente $f(0) = 0$.

Analogamente, para $n > 1$ tem-se, derivando n vezes a condição $f(2z) = 2f(z)$, e avaliando-a em $z = 0$,

$$2^n \frac{d^n f}{dz^n}(0) = 2\frac{d^n f}{dz^n}(0),$$

o que permite concluir que, exceptuando o caso $n = 1$, todas as outras derivadas satisfazem $f^{(n)}(0) = 0$ e que portanto a série de Taylor se reduz a

$$f(z) = f'(0)z.$$

Ou seja, conclui-se que f é igual a uma constante complexa multiplicada por z.