



Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2009/2010

1º Teste - Versão A

Cursos: LEIC-A, MEAer, MEMec, LEAN, MEC, LEGM, LET

Justifique cuidadosamente as respostas apresentando todos os cálculos.

Data: 7 de Novembro de 2009 - das 13h às 14:30h

Duração: 1h30.

1. Seja $u(x, y) = xy^2 + e^{-y} \cos(x) + \alpha(x)$, em que $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^2(\mathbb{R})$.

[1.0] (a) Determine a forma geral de $\alpha(x)$ de modo a que u seja a parte real duma função holomorfa $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

[1.0] (b) Considerando $\alpha(x) = -\frac{x^3}{3} + x$, calcule a função f holomorfa em \mathbb{C} tal que $\operatorname{Re}(f) = u$ e $f(0) = 1 + i$.

[1.0] (c) Calcule $\oint_{|z|=2009} \frac{f(z)}{(z-i)^2} dz$, onde a curva é percorrida uma vez em sentido directo.

2. Considere a função $f(z) = \frac{1}{2-z}$, definida em $\mathbb{C} \setminus \{2\}$.

[1.5] (a) Determine o desenvolvimento de f em série de Taylor na região $|z-i| < \sqrt{5}$, e o desenvolvimento de Laurent na região $|z-i| > \sqrt{5}$.

[0.5] (b) Aproveite o resultado da alínea anterior para determinar $f^{(7)}(i)$.

[1.5] 3. Calcule

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \operatorname{sen}(x)}{5 - 4 \cos(x)} dx.$$

4. Considere a função

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2(z^2 + 1)} + z^3 \cos \frac{1}{z}$$

[1.0] (a) Determine e classifique todas as singularidades de f .

[1.5] (b) Calcule

$$\oint_{|2z-i|=2} f(z) dz.$$

[1.0] 5. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ inteira tal que $f(2z) = 2f(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Mostre que existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = az$, $\forall z \in \mathbb{C}$.