

ANÁLISE COMPLEXA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

TESTE 1B- 18 DE ABRIL DE 2009 - DAS 9H ÀS 10:30H

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função $u(x, y) = x + e^{ax} \operatorname{sen} 2y$.

[1 val.] (a) Determine $a < 0$ tal que $u(x, y)$ é a parte real de uma função holomorfa $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

[1 val.] (b) Calcule $f'(1)$ para a função f definida na alínea anterior (tome $a = -2$ se não resolveu a alínea anterior).

[1 val.] (c) Calcule $\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz$ onde o caminho de integração é percorrido uma vez, no sentido horário.

2. Considere a função $f(z) = \operatorname{sen} z + \frac{1}{z+1}$.

[1 val.] (a) Calcule $\int_{\gamma} f(z) dz$ onde γ é o segmento de recta que une -2 a i .

[1 val.] (b) Determine o desenvolvimento em série de Taylor de f em torno do ponto $z = i$ indicando o domínio de validade do desenvolvimento.

3. Considere a função $f(z) = \frac{1}{z^2 + z} + e^{\frac{1}{z}}$.

[1 val.] (a) Ache o desenvolvimento em série de Laurent de $f(z)$ na região $|z| > 1$.

[1 val.] (b) Calcule $\int_{\gamma} f(z) dz$ onde γ é a circunferência de raio 3 centrada em i percorrida uma vez no sentido positivo.

[2 val.] 4. Calcule o integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 3)(x^2 + 4)} dx.$$

[1 val.] 5. Determine para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan n\right)^{\alpha}}$$

converge.