Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE COMPLEXA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

TESTE 1A - 18 DE ABRIL DE 2009 - DAS 9H ÀS 10:30H

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função $v(x,y) = x + e^{ax} \operatorname{sen} 2y$.
   (a) Determine $a > 0$ tal que v é a parte imaginária de uma função holomorfa $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
   (b) Calcule $f'\left(\frac{i\pi}{2}\right)$ para a função f definida na alínea anterior (tome $a = 2$ se não resolveu a alínea anterior).
   (c) Calcule $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{\left(z - \frac{i\pi}{2}\right)^2}\, dz$, onde o caminho de integraçãoo é percorrido uma vez, no sentido horário.

Resolução:

(a) Se v é a parte imaginária de uma função holomorfa em todo o plano complexo então é necessariamente harmónica, isto é, satisfaz a equação de Laplace
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$
em qualquer ponto de $\mathbb{C}$.
Qualquer que seja o valor real de a a função v dada é obviamente indefinidamente diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Para determinar o valor de $a > 0$ adequado há que calcular as suas derivadas parciais de segunda ordem e substituí-las na equação de Laplace:
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = a^2 e^{ax} \operatorname{sen} 2y,$$
e
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -4e^{ax} \operatorname{sen} 2y,$$
donde
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = (a^2 - 4)e^{ax} \operatorname{sen} 2y,$$
pelo que, para que esta função se anule em todos os pontos $x + iy \in \mathbb{C}$, se tem obrigatoriamente que ter
$$a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2.$$
Concluimos portanto que, se v é a parte imaginária duma função holomorfa em $\mathbb{C}$, com $a > 0$, esse valor de a só poderá ser $a = 2$.

(b) Independentemente de se conhecer explicitamente a parte real da função holomorfa f, a sua derivada em qualquer ponto poderá ser sempre dada (por consequência das equações de Cauchy-Riemann) apenas a partir das derivadas parciais da sua parte imaginária v:
$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$
Com o valor de $a = 2$ obtido na alínea anterior
$$\frac{\partial v}{\partial x} = 1 + 2e^{2x} \operatorname{sen} 2y,$$

e
$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2x}\cos 2y.$$
Donde, substituindo na fórmula anterior da derivada, e calculando para $x + iy = i\frac{\pi}{2}$,
$$f'\left(i\frac{\pi}{2}\right) = -2 + i.$$

(c) O integral pedido é, obviamente, o correspondente à primeira derivada de f pela fórmula integral de Cauchy,
$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz,$$
quando f é diferenciável sobre, e no interior, duma curva de Jordan Γ e z_0 é um ponto no seu interior.
Há que ter atenção apenas que, no integral pedido, a curva é percorrida no sentido horário (negativo), pelo que troca o sinal relativamente à fórmula integral (onde a curva é percorrida no sentido positivo). A função f, sendo holomorfa em todo o $\mathbb{C}$ está, naturalmente, nas condições de aplicação da fórmula integral de Cauchy e o ponto $i\frac{\pi}{2}$ está no interior da circunferência de raio 2 centrada na origem.
Assim,
$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{\left(z - \frac{i\pi}{2}\right)^2}\,dz = -2\pi i f'\left(i\frac{\pi}{2}\right),$$
e o valor da derivada é exactamente o calculado na alínea anterior, donde
$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{\left(z - \frac{i\pi}{2}\right)^2}\,dz = -2\pi i(-2+i) = 2\pi(1+2i).$$

2. Considere a função $f(z) = e^z + \dfrac{1}{z-1}$.
   (a) Calcule $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$ onde γ é o segmento de recta que une 0 a $2+i$.
   (b) Determine o desenvolvimento em série de Taylor de f em torno do ponto $z = i$ indicando o domínio de validade do desenvolvimento.

Resolução:

(a) Se considerarmos a função $F(z) = e^z + \log(z-1)$, em que para a função $\log$ tomamos o ramo correspondente a $\text{Arg}(z) \in [0, 2\pi[$, então F é diferenciável em todo o plano complexo à excepção da parte do eixo real à direita do ponto $z = 1$.
No seu domínio de diferenciabilidade tem-se
$$F'(z) = e^z + \frac{1}{z-1} = f(z),$$
pelo que F é, nessa região, uma primitiva de f.
Como tal, pelo teorema fundamental do cálculo, para qualquer curva γ nessa região, unindo 0 a $2+i$, tem-se
$$\int_\gamma f(z)dz = F(2+i) - F(0).$$
Obviamente um segmento de recta unindo esses dois pontos é um caso particular de uma tal curva, que não atravessa a região de não-diferenciabilidade de F.

Assim, temos

$$\int_\gamma f(z)dz = F(2+i) - F(0) = e^{2+i} + \log(1+i) - 1 - \log(-1).$$

E, de acordo com a escolha do ramo do logaritmo feita para F, temos:

$$\log(1+i) = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} = \frac{\log 2}{2} + i\frac{\pi}{4},$$

e

$$\log(-1) = \log 1 + i\pi = i\pi,$$

donde

$$e^{2+i} + \log(1+i) - 1 - \log(-1) = (e^2\cos 1 + \frac{\log 2}{2} - 1) + i(e^2 \operatorname{sen} 1 - \frac{3\pi}{4}).$$

(b) A série de Taylor da exponencial e^z, em torno do ponto $z = i$ é dada por

$$e^z = e^{z-i+i} = e^i\, e^{z-i} = e^i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^i}{n!}(z-i)^n.$$

Sendo e^z um função inteira, ou seja, diferenciável em todo o $\mathbb{C}$, este desenvolvimento em série de Taylor converge e é igual a e^z em todo o plano complexo.
Já a função racional $\frac{1}{z-1}$ tem uma singularidade em $z = 1$ e o teorema de Taylor garante apenas a convergência da correspondente série, na bola centrada em $z = i$, com o raio máximo possível até atingir esta singularidade, ou seja $|i-1| = \sqrt{2}$. Com efeito, se determinarmos a série de Taylor, tentando reescrever a função $\frac{1}{z-1}$ como a soma duma série geométrica envolvendo potências de $(z-i)$, tem-se

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-i+i-1} = \frac{1}{i-1}\frac{1}{\left(1-\left[\frac{z-i}{1-i}\right]\right)}.$$

O segundo termo deste produto é evidentemente a soma duma série geométrica de razão $\frac{z-i}{1-i}$, pelo que

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{i-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-i)^{n+1}}(z-i)^n,$$

a qual converge sempre que a razão da série geométrica for menor que 1, ou seja

$$\left|\frac{z-i}{1-i}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-i| < |1-i| = \sqrt{2}.$$

Finalmente, a série de Taylor de f, centrada em $z = i$, resulta da soma das duas séries obtidas:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^i}{n!}(z-i)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-i)^{n+1}}(z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^i}{n!} - \frac{1}{(1-i)^{n+1}}\right)(z-i)^n,$$

sendo que a série converge, e é igual à função f, na intersecção das duas regiões de convergência determinadas, ou seja, quando $|z-i| < \sqrt{2}$.

3. Considere a função $f(z) = \dfrac{1}{z^2-2z} + \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{z}\right)$.
   (a) Ache o desenvolvimento em série de Laurent na região $|z| > 2$.

(b) Calcule $\int_\gamma f(z)\,dz$ onde γ é a circunferência de raio 3 centrada em i percorrida uma vez no sentido negativo.

Resolução:

(a) Uma vez que

$$\frac{1}{z^2-2z} = \frac{1}{z}\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}$$

tem-se

$$\frac{1}{z^2-2z} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+2}}$$

sendo este desenvolvimento válido para $\left|\frac{2}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 2$. Como

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}}$$

para todo o $z \neq 0$, conclui-se que o desenvolvimento de Laurent pretendido na região definida pela condição $|z| > 2$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+2}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}}.$$

(b) Como a função é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\{0,2\}$, o Teorema de Cauchy garante que o integral ao longo de γ é igual ao integral ao longo da circunferência $\gamma' = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 3\}$ percorrida uma vez no sentido negativo[1].
Usando a fórmula integral para os coeficientes do desenvolvimento de Laurent temos então

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma'} f(z)dz = -2\pi i a_{-1} = -2\pi i$$

onde $a_{-1} = 1$ é o coeficiente de $1/z$ no desenvolvimento de Laurent calculado na alínea anterior e o sinal $-$ se deve ao facto da curva ser percorrida no sentido negativo.
Resolução alternativa: A função f tem singularidades isoladas em $z = 0$ e $z = 2$. Uma vez que

$$\lim_{z\to 2}(z-2)f(z) = \lim_{z\to 2}\frac{1}{z} + (z-2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2} + 0$$

concluímos que $z = 2$ é um pólo simples e que

$$\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = \frac{1}{2}$$

A função $\frac{1}{z(z-2)}$ tem um pólo simples em $z = 0$ com resíduo

$$\lim_{z\to 0} z\frac{1}{z(z-2)} = -\frac{1}{2}$$

enquanto que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}} \quad (\text{ para todo o } z \neq 0)$$

[1]Poderíamos tomar para γ' qualquer curva de Jordan contida na região $|z| > 2$, contendo 0 no seu interior e percorrida uma vez no sentido horário.

tem uma singularidade essencial em $z=0$ com resíduo 1 (uma vez que o resíduo é o coeficiente de $1/z$ na expansão de Laurent anterior). O resíduo de f em 0 é portanto

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=0}\left(\frac{1}{z(z-2)}\right) + \operatorname*{Res}_{z=0}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Pelo Teorema dos Resíduos conlcluímos então que

$$\int_\gamma f(z)dz = -2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=2} f(z)\right) = -2\pi i\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = -2\pi i.$$

4. Calcule o integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx.$$

Resolução:

Seja

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+2)}$$

e consideremos os contornos $\gamma_R = \{z\in\mathbb{C}\colon |z| = R \text{ e } \operatorname{Im}(z)\geq 0\}$ percorrido no sentido anti-horário e $\Gamma_R = \gamma_R\cup[-R,R]$.

Para $R>\sqrt{2}$, o contorno Γ_R contém duas singularidades de $f(z)$: $z=i$ e $z=\sqrt{2}i$. Ambas são pólos simples com resíduos

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \left.\frac{1}{\frac{d}{dz}\left((z^2+1)(z^2+2)\right)}\right|_{z=i} = -\frac{i}{2}$$

e

$$\operatorname*{Res}_{z=\sqrt{2}i} f(z) = \left.\frac{1}{\frac{d}{dz}\left((z^2+1)(z^2+2)\right)}\right|_{z=\sqrt{2}i} = \frac{i}{2\sqrt{2}}$$

logo, pelo Teorema dos Resíduos,

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i\left(-\frac{i}{2}+\frac{i}{2\sqrt{2}}\right) = \pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Por outro lado,

$$(1)\qquad \oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx + \int_{\gamma_R}\frac{1}{(z^2+1)(z^2+2)}\,dz$$

e

$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{1}{(z^2+1)(z^2+2)}\,dz\right| \leq \int_{\gamma_R}\left|\frac{1}{(z^2+1)(z^2+2)}\right|ds \leq \pi R\frac{1}{(R^2-1)(R^2-2)}$$

onde usámos o facto de $|z^2+1|\geq |z^2|-1 = R^2-1$ e, analogamente $|z^2+2|\geq R^2-2$ assim como o facto de γ_R ter comprimento πR. Como

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\pi R}{(R^2-1)(R^2-2)} = 0,$$

passando ao limite em (1) vemos que

$$\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx,$$

e portanto

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

5. Determine para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\frac{\pi}{2}-\arctan n)^\alpha}$$

converge.

Resolução:

Uma vez que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\arctan n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+n^2}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n^2} = 1$$

(aplicámos a regra de Cauchy para obter a primeira igualdade), vemos que a série em questão tem a mesma natureza que a série de Dirichlet

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{n^\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha$$

e portanto converge sse $\alpha < -1$.