Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE COMPLEXA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

TESTE 1A - 18 DE ABRIL DE 2009 - DAS 9H ÀS 10:30H

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função $v(x, y) = x + e^{ax} \operatorname{sen} 2y$.

[1 val.] (a) Determine $a > 0$ tal que v é a parte imaginária de uma função holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

[1 val.] (b) Calcule $f'\left(\frac{i\pi}{2}\right)$ para a função f definida na alínea anterior (tome $a = 2$ se não resolveu a alínea anterior).

[1 val.] (c) Calcule $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{\left(z - \frac{i\pi}{2}\right)^2}\, dz$, onde o caminho de integração é percorrido uma vez, no sentido horário.

2. Considere a função $f(z) = e^z + \dfrac{1}{z-1}$.

[1 val.] (a) Calcule $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz$ onde γ é o segmento de recta que une 0 a $2 + i$.

[1 val.] (b) Determine o desenvolvimento em série de Taylor de f em torno do ponto $z = i$ indicando o domínio de validade do desenvolvimento.

3. Considere a função $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 2z} + \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

[1 val.] (a) Ache o desenvolvimento em série de Laurent na região $|z| > 2$.

[1 val.] (b) Calcule $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz$ onde γ é a circunferência de raio 3 centrada em i percorrida uma vez no sentido negativo.

[2 val.] 4. Calcule o integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}\, dx.$$

[1 val.] 5. Determine para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - \arctan n\right)^\alpha}$$

converge.