Análise Complexa e Equações Diferenciais

Problemas propostos para as aulas práticas

Semana 9 - 8 a 12 de Novembro de 2010

1. Para cada uma das seguintes equações diferenciais, esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de soluções .

   a) $y' = (2-y)(y-1)$, b) $y' = y(1-y^2)$,

   c) $y' = \operatorname{sen}(y-t)$, d) $y' = \dfrac{y+t}{y-t}$,

   e) $y' = t^2 + y^2$, f) $y' = \dfrac{t\,y}{1+t^2}$.

2. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias lineares.

   a) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t\,y}{1+t^2}$ b) $\dfrac{dy}{dt} = -ye^t$

   c) $\dfrac{dy}{dx} + y = 2 + 2x$ d) $\psi' = \psi - t$

   e) $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = (x-2)e^x$ f) $\dfrac{di}{dt} - 6i = 10\operatorname{sen}(2t)$

   g) $\dfrac{dy}{dt} = y\left(\dfrac{1}{t} - \tan t\right) + t\cos t$ h) $(1+y^2)\dfrac{dx}{dy} = \arctan y - x$

3. Determine as soluções dos seguintes problemas de Cauchy

   a) $xy' = 2y + x^3e^x,\ y(1) = 0,$

   b) $\dfrac{dv}{du} + \dfrac{2u}{1+u^2}v - \dfrac{1}{1+u^2} = 0,\ v(0) = 1.$

   c) $\begin{cases} x' + h(t)x - t = 0, \\ x(-1) = 2 \end{cases}$, com $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$

4. De acordo com a lei de arrefecimento de Newton, a taxa de arrefecimento de uma substância numa corrente de ar, é proporcional à diferença entre a temperatura da substância e a do ar. Assumindo que a temperatura do ar é 30^o e que a substância arrefece de 100^o para 70^o em 15m, determine o tempo que a substância demora a atingir a temperatura de 40^o.

5. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias

   a) $x^3 + (y+1)^2 \frac{dy}{dx} = 0$,

   b) $\varphi' = e^{\varphi - t}$,

   c) $xy + (1+x^2)y' = 0$,

   d) $y' = 1 - x + y^2 - xy^2$,

   e) $2ty^3 + 3t^2y^2y' = 0$,

   f) $(1+t)\frac{dy}{dt} + \frac{y}{2} = (1+t)^{5/2}$.

6. Resolva o problema de Cauchy $\varphi(\theta)\varphi'(\theta) = \theta, \varphi(1) = \alpha$ e determine para que valores de α é que a solução está definida para todo o $\theta \in \mathbb{R}$.

7. Considere a equação diferencial separável $x' = x\mathrm{sen}\, t + x^2\mathrm{sen}\, t$. Determine a solução desta equação que satisfaz a condição inicial $x(\frac{\pi}{2}) = -2$, e determine o seu intervalo máximo de existência.

8. Determine as curvas ortogonais às soluções de $y' = y$ e esboce-as.

9. Determine a solução geral da equação diferencial

$$x^2 \cos y \frac{dy}{dx} = 2x\mathrm{sen}\, y - 1$$

   Sugestão: Efectue a mudança de variável $v = \mathrm{sen}\, y$

10. Considere a equação diferencial

$$\dot{y} = f(at + by + c)$$

   em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

   a) Mostre que a substituição $v = at + by + c$, transforma a equação numa equação separável.

   b) Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\dot{y} = e^{2t+y-1} - 2 \quad , \quad y(0) = 1$$

   indicando o intervalo máximo de solução.

11. Considere a equação diferencial

$$2x\frac{dy}{dx} + 2xy^5 - y = 0$$

   (a) Determine a solução geral da equação efectuando a mudança de variável $v = y^{-4}$.

   (b) Determine a solução que verifica $y(1) = 1$, indicando o seu intervalo máximo de existência.

(c) No caso geral, considere a equação diferencial de Bernoulli

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(t)x + \beta(t)x^n$$

onde α e β são funções definidads e contínuas em $I \subset \mathbb{R}$. Mostre que a mudança de variável $y(t) = (x(t))^{1-n}$ transforma a equação numa equação linear.

12. Considere a equação de Ricati escalar

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} - x - x^2 \tag{1}$$

(a) Mostre que a função $\varphi(t) = \frac{1}{t} + \psi(t)$ é solução da equação de Ricati sse ψ é solução de uma certa equação de Bernoulli.

(b) Determine a solução da equação (1).

13. Determine a solução da equação diferencial

$$\frac{d\,y}{d\,t} = \frac{t^2 + 3y^2}{2ty} \quad , \quad t > 0 \quad \text{e} \quad y < 0$$

que verifica a condição inicial $y(1) = -1$ e indique o intervalo máximo de definição da solução.
Sugestão: Considere a mudança de varável $v = y/t$.

14. Dada a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = f(t)$$

onde a e f são funções contínuas em $\mathbb{R}$ que verificam

$$a(t) > c > 0 \quad \forall t \quad , \quad \lim_{t\to\infty} f(t) = 0$$

Mostre que quaquer solução da equação diferencial satisfaz

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$