

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Problemas propostos para as aulas práticas

Semanas 7 e 8 - 25 de Outubro a 5 de Novembro de 2010

1. Determine a série de Laurent da função $f(z)$ na vizinhança do ponto z_0 , isto é, válida em $0 < |z - z_0| < R$, indicando o valor de R em cada caso.

a) $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2}$, $z_0 = 0$ b) $f(z) = z^3 e^{1/z}$, $z_0 = 0$

c) $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$, $z_0 = 0$ d) $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z - 2}$, $z_0 = 2$

2. Para cada função e região indicada, determine as séries de Laurent respectivas:

a) $\frac{1}{z - 1}$, $|z| > 1$.

b) $z^5 \left(e^{\frac{1}{z}} + z \right)$, $|z| > 0$.

c) $\frac{1}{(z - 2)(z - i)}$, $1 < |z| < 2$.

d) $\frac{1}{(z - 2)(z - i)}$, $|z| > 2$.

e) $\frac{z - i}{(z - 2i)^2}$, $|z - i| > 1$.

f) $(3z^2 - 1) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi z^3 + z}{z^3} \right)$, $|z| > 0$.

3. Determine a série de Laurent de $\frac{1}{(z^2 + 1)^2}$ nas seguintes regiões:

(a) $0 < |z - i| < 2$.

(b) $2 < |z - i|$.

e calcule os seguintes integrais:

(a) $\oint_{|z-i|=1} \frac{1}{(z^2 + 1)^2} dz$.

(b) $\oint_{|z-i|=3} \frac{1}{(z^2 + 1)^2} dz$.

4. Seja $P(z)$ um polinómio e γ uma curva simples e fechada em \mathbb{C} , percorrida uma vez no sentido directo, e que não intersecta o conjunto dos zeros de $P(z)$. Mostre que o valor de

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{P'(z)}{P(z)} dz$$

é igual ao número de zeros (contando multiplicidades) de $P(z)$ que pertencem ao interior da curva γ .

5. Determine e classifique as singularidades das seguintes funções, e calcule os resíduos correspondentes.

a) $f_1(z) = \frac{1 - \cos z}{z - \pi}$

b) $f_2(z) = \frac{z}{(z^2 + 2)^2}$

c) $f_3(z) = \frac{1}{z^7(1 - z^2)}$

d) $f_4(z) = \frac{\text{sen } z}{z^4(1 - z^2)}$

e) $f_5(z) = z^2 \exp \frac{1}{z}$

6. Considere a função

$$g(z) = \frac{1}{\text{sen } \frac{\pi}{z}}.$$

Mostre que $g(z)$ não possui uma singularidade isolada em $z = 0$.

7. Seja f uma função analítica no ponto z_0 . Mostre que a função $g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$ possui em z_0 uma singularidade removível, caso $f(z_0) = 0$, e um pólo simples de resíduo $f'(z_0)$, em caso contrário.

8. Suponha que $f(z) = h(z)/g(z)$ tem um pólo de ordem 1 em $z = z_0$, sendo h e g analíticas em z_0 e $h(z_0) \neq 0$. Mostre que

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}.$$

9. Considere as curvas $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 2\pi i| = 1\}$, percorridas uma vez no sentido directo. Calcule o valor dos integrais

$$\oint_{\gamma_k} g(z) dz,$$

para cada uma das seguintes funções complexas:

(i) $g(z) = \frac{1}{e^z - 1}$, (ii) $g(z) = z^2 \text{sen}(z^{-1})$, (iii) $g(z) = \frac{z - 2i}{z^4 - 4iz^3 - 4z^2}$.

10. Utilize o teorema dos resíduos para calcular os seguintes integrais no plano complexo, em que as curvas de Jordan indicadas são percorridas uma vez no sentido positivo

- a) $\oint_{|z+1+i|=2} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2 - 1} dz$
 b) $\oint_{|z|=4} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(\pi - z)} dz$
 c) $\oint_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z^3} dz$

11. Calcule o seguinte integral

$$\oint_C \left(\frac{z^2}{\operatorname{sen}(\pi z)} + z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{(z-1)^2} \right) dz,$$

onde C é a elipse $|z-1| + |z+1| = 3$, percorrida uma vez no sentido positivo.

12. Recorrendo ao Teorema dos Resíduos, mediante a escolha de um contorno de integração adequado, estabeleça os seguintes resultados:

- a) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \operatorname{sen}^2 \theta} = \pi \sqrt{\frac{2}{3}}$
 b) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5 - 4\cos 2\theta} d\theta = \frac{3\pi}{8}$

Sugestão: mostre que $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3\theta)}{5 - 4\cos(2\theta)} d\theta = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{i6\theta}}{5 - 4\cos(2\theta)} d\theta$

- c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} dx = \frac{(3 - \sqrt{3})\pi}{6}$
 d) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^4 + 4)} dx = \frac{\pi}{12}$
 e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} = \frac{2\pi}{3}$
 f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2 + 1)} dx = \frac{\pi}{e}$
 g) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)} dx = \frac{\pi}{2e}$

13. Seja $f(z)$ uma função analítica no conjunto $A = \mathbb{C} - \{z_1, \dots, z_n\}$. Observe que a função $F(z) = \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$ possui uma singularidade isolada em $z = 0$. Defina-se o **resíduo de f em ∞** por:

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\operatorname{Res}(F(z), 0).$$

Mostre que se $\gamma \subset A$ é uma curva simples, fechada, percorrida no sentido directo, que contém os pontos $\{z_1, \dots, z_n\}$ no seu interior, então:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty).$$