Análise Complexa e Equações Diferenciais

Problemas propostos para as aulas práticas

Semana 6 - 18 a 22 de Outubro de 2010

1. Calcule a soma das séries:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-(5n+1)}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$,
   d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

2. Prove que qualquer número representado por uma dízima periódica é racional.
   Sugestão: $0.2151515\ldots = \frac{2}{10} + \frac{15}{1000}(1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \ldots)$.

3. Determine a natureza (convergência ou divergência) das seguintes séries de termos positivos:

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3+4}$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$, c) $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,
   d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\log n}$, e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^2}$, f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2+2}$,
   g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n}{e^n}$, h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^2+2^n}$, i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$,
   j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+3^n}$, l) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{1000}}{(1.001)^n}$,
   m) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$, n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt[3]{n+1}\sqrt[4]{n+2}}$, o) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5...(2n+1)}{3.6.9...(3n+3)}$,
   p) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(2n)!]^2}{n!(3n)!}$, q) $\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^3$.

4. Estude a natureza (convergência simples, absoluta ou divergência) das seguintes séries complexas

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n+in)$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2ni}}{n\sqrt{n}}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{n/2}}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}$,
   e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^n}{\log n}$, f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$, g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(i\pi/n)}{n^{\log n}}$, h) $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2 + \cos n)e^{-n+in^2}$.

5. Para que valores de z é a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^n$ convergente?

6. A **função ζ de Riemann** é definida pela fórmula:

$$\zeta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

   Mostre que esta série é absolutamente convergente para $\mathrm{Re}(z) > 1$.

7. Escreva uma expressão da forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ para as seguintes funções:

   a) $\frac{1}{2z+5}$ b) $\frac{1}{z^4+1}$ c) $\frac{1+iz}{1-iz}$ d) $\frac{1}{1-z+z^2}$

   e) $\frac{1}{(z+1)(z+2)}$ f) $\frac{1}{(z^2-1)(z^2-9)}$

   Em cada caso, indique o conjunto onde a expressão obtida é válida.

8. Determine a região de convergência das seguintes séries de potências:

   a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{\sqrt{2}}-i\sqrt{2}\right)^n}{n^4+1}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n!)^2}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(z+1-i)^n$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(z+1)^n$ e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n z^{n^2}$

9. Se a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tem raio de convergência R, quais os raios de convergência das séries $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^5 z^n$ e $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n+3}$?

10. Determine a região de convergência e calcule a soma das seguintes séries de potências:

    a) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} (\alpha z)^{3n}, \quad \alpha \in \mathbb{C}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n z^{2n+1}$, c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$.

11. Determine os desenvolvimentos de Taylor das seguintes funções em torno dos pontos indicados, bem como as respectivas regiões de convergência:

    a) $\frac{1}{1-z}$, em torno de $z = 3$.
    b) $e^{5z} + \frac{3}{3+5z}$, em torno de $z = 2$.
    c) $\operatorname{sen} z$, em torno de $z = \pi$.
    d) e^{2z} , em torno de $z = i\pi$.
    e) $z^2 e^z$, em torno de $z = 1$.
    f) Valor principal de $\log z$, em torno de $z = i - 1$.

12. Considere a função $f(z) = \frac{e^z}{\operatorname{sen}^2 z}$. Sem calcular os respectivos coeficientes, indique justificadamente qual o raio de convergência do desenvolvimento de f em série de potências de $(z-2)$.

13. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira, tal que existem $M, R > 0$ e um inteiro $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $|f(z)| \leq M|z|^n$, para $|z| > R$. Mostre que então f é um polinómio de grau $\leq n$.
    Obs: Este resultado mostra que funções inteiras, não polinomiais, têm necessariamente de crescer em módulo mais rapidamente que qualquer polinómio, quando $z \to \infty$. Como se justifica esta afirmação, por exemplo, no caso da função inteira (e não polinomial) $\cos z$?