# Análise Complexa e Equações Diferenciais

## Problemas propostos para as aulas práticas

**Semana 5 - 11 a 15 de Outubro de 2010**

1. Seja $\Gamma \subset \mathbb{C}$ a elipse $|z - \pi i| + |z - 2\pi i| = \frac{7\pi}{2}$, percorrida no sentido positivo. Calcule

   (a) $\oint_\Gamma z^3 \cosh z \, dz$

   (b) $\oint_\Gamma e^{\cos^3 z} \, dz$

   (c) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{ze^{-z}}{z - \frac{i}{2}} \, dz$

   (d) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{1}{z^2 + \pi^2} \, dz.$

   (e) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{5z - \pi i}{z^2(2z - \pi i)} dz$

   (f) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{dz}{z^2(z - 2\pi i)^3}$

   (g) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{\cos z}{(z - i\pi)^{11}} \, dz$ .

2. Considere a função complexa definida por

$$f(z) = f(x + iy) = x^2 - y^2 - 2xy + 2y + i\left(x^2 - y^2 + 2xy - 2x\right).$$

   Justificando pormenorizadamente a sua resposta, determine o valor do integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-2)^2} \, dz,$$

   onde $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 4\}$ é percorrida uma vez no sentido directo.

3. Para $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, designe-se por $\gamma(a, r)$ o caminho $\gamma(t) = a + re^{it}$, $(t \in [0, 2\pi])$. Calcule $\displaystyle\oint_{\gamma(a,r)} (z^2 + 1)^{-1} dz$ para:

   a) $\gamma(1, 1)$  b) $\gamma(i, 1)$  c) $\gamma(-i, 1)$  d) $\gamma(0, 2)$  e) $\gamma(3i, \pi)$

4. Calcule o seguinte integral

$$\oint_{|z+i|=2} \frac{z^3 + e^z}{z^2 + z - 2} \, dz,$$

   em que a curva é percorrida uma vez no sentido directo.

5. Determine todos os possíveis valores do integral

$$\oint_C \frac{z\cos z}{z^2+1}\,dz,$$

onde $C$ é uma qualquer curva de Jordan, seccionalmente regular, contida em $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$.

6. Poderá existir uma função analítica em $\mathbb{C}$ cuja parte real seja $u(x,y)=e^{-y}x+e^{x}y$?

7. Determine funções harmónicas conjugadas para as seguintes funções:

   a) $u(x,y)=x^2+xy-y^2$;
   b) $u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$;
   c) $u(x,y)=e^{-y}(x\cos x-y\,\mathrm{sen}\,x)$;
   d) $u(x,y)=\log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+2y$.

8. Sejam $\alpha$, $\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, funções diferenciáveis, e $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ a função definida por

$$f(x+iy)=\alpha(x)-3xy^2+i(3x^2y+\beta(y))$$

para $x,y\in\mathbb{R}$. Decida se pode ou não escolher $\alpha$, $\beta$ de modo a que $f$ seja uma função inteira. Em caso afirmativo, determine $\alpha$, $\beta$ de maneira a $f(1)=i$.

9. Considere a seguinte função $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$:

$$u(x,y)=x^3+y^3-3xy(x+y)$$

   (a) Mostre que $u$ é uma função harmónica.
   (b) Determine a função harmónica conjugada $v$ tal que $v(0,0)=0$.
   (c) Calcule
$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-1)^2}\,dz \qquad \text{e} \qquad \oint_C \frac{f(z)}{z^3}\,dz$$
onde $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z=x+iy$ e $C$ é a curva $\{z\in\mathbb{C}:|z|=2\}$ percorrida no sentido positivo.

10. Considere a função $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ definida por $g(z)=z(z^2+\overline{z}^2-|z|^2)$, e sejam $u$ e $v$ funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ tais que $u(x,y)=\mathrm{Re}\,[g(x+iy)]$ e $v(x,y)=\mathrm{Im}\,[g(x+iy)]$.

    (a) Determine o conjunto dos pontos onde $u$ e $v$ satisfazem as equações de Cauchy–Riemann. O que pode concluir sobre a analiticidade da função $g$?
    (b) Mostre que $u$ é uma função harmónica.
    (c) Determine uma função $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, analítica em $\mathbb{C}$, tal que $\mathrm{Re}\,(f)=u$.