

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Problemas propostos para as aulas práticas

Semana 3 - 27 de Setembro a 1 de Outubro de 2010

1. Use coordenadas polares para determinar a imagem dos seguintes conjuntos através da aplicação $z \rightarrow z + \frac{1}{z}$

a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ c) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

2. a) Mostre que para todo o $a \in \mathbb{C} \setminus 0$ e $b \in \mathbb{R}$ se tem $|a^b| = |a|^b$.

b) Em que condições se verifica a igualdade $\log a^b = b \log a$, para números complexos $a \neq 0$ e b ?

3. Calcule os seguintes limites ou mostre que não existem

a) $\lim \frac{n+2i}{7+3ni}$ b) $\lim \frac{\sinh(ni)}{n}$ c) $\lim e^{in}$ d) $\lim(1+i)^{-n}$

e) $\lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2+3iz-2}{z+i}$ f) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z}$ g) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{\sinh(iz)}$ h) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}$

4. Ao longo de que rectas passando pela origem (identificadas por $\operatorname{Arg}(z) = \text{const.}$), existe o limite $\lim_{z \rightarrow \infty} |e^z|$?

5. Para que valores de z é convergente a sucessão nz^n ?

6. Mostre que, se $|z| > 1$ então $\lim \frac{z^n}{n} = \infty$.

7. Determine as partes real e imaginária das seguintes funções de variável complexa e indique os pontos de \mathbb{C} onde são contínuas:

a) $\operatorname{Re}(z)$ b) \bar{z} c) $|z|$ d) z^2 e) $z|z|$

f) $e^{\cos z}$ g) $\log(z+2)$ h) $\frac{1}{(3-5z)^3}$ i) $\frac{1+z}{(\operatorname{sen} z)^2}$

8. Mostre que, se f é contínua em $z_0 \in D_f$ e $f(z_0) \neq 0$, então existe uma bola centrada em z_0 tal que $f(z) \neq 0$ para todos os pontos $z \in D_f$ nessa bola.

9. Determine os domínios de diferenciabilidade e de analiticidade das seguintes funções, isto é, os conjuntos de pontos de \mathbb{C} onde admitem derivada e onde são analíticas, calculando a derivada onde ela exista:

a) $xy - ix$ b) $x^2 - y^2 + 2ixy$ c) $x^2 - y + i(x - y^2)$ d) $z^2 - 3z$ e) $\cos(3z) - i$

f) $\operatorname{Im}(z^2)$ g) $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)$ h) $z(e^{iz} - e^{-iz})$ i) $|z|\bar{z}$ j) $\bar{e^z}$

k) $ze^{\bar{z}}$ l) $\frac{1}{z} - \bar{z}$

10. Deduza as equações de Cauchy-Riemann, em coordenadas polares, da seguinte forma. Seja $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função definida num conjunto aberto A , tal que $f(z) = u(z) + iv(z)$, para $z \in A$. Seja $T : \mathbb{R}^+ \times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$ a aplicação da mudança de coordenadas polares dada por $T(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$ (Naturalmente, qualquer outro intervalo de comprimento 2π , para domínio dos ângulos θ , serviria igualmente). Defina $\tilde{u}(\rho, \theta) = u \circ T(\rho, \theta) = u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = u(\rho e^{i\theta})$ e $\tilde{v}(\rho, \theta) = v \circ T(\rho, \theta) = v(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = v(\rho e^{i\theta})$.

- a) Mostre que T , como aplicação de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 , é continuamente diferenciável e tem uma inversa, também continuamente diferenciável.
- b) Usando o teorema da diferenciação de funções compostas, em \mathbb{R}^2 , mostre que f é analítica no conjunto $A \setminus \{x + iy : x \geq 0, y = 0\}$ se e só se $(\tilde{u}, \tilde{v}) : T^{-1}(A) \rightarrow \mathbb{R}^2$ é diferenciável e satisfaz as equações de Cauchy-Riemann polares, em $T^{-1}(A)$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}.$$

- c) Determine a fórmula para $f'(z) = f'(\rho e^{i\theta})$ em coordenadas polares, em função das derivadas parciais de \tilde{u} e \tilde{v} em ordem a ρ e θ .
- d) Sabendo que a função $\log z$ é dada em coordenadas polares por $\log z = \log(\rho e^{i\theta}) = \log \rho + i\theta$ verifique que é diferenciável e determine a sua derivada.