Análise Complexa e Equações Diferenciais

Problemas propostos para as aulas práticas

Semana 2 - 20 a 24 de Setembro de 2010

1. Escreva na forma $a + bi$ os seguintes números complexos

   a) $2\,e^{\frac{4\pi i}{3}}$ b) e^{2+i} c) $\operatorname{sen}(1+i)$ d) $\cos(2+3i)$

2. Estabeleça as seguintes identidades (onde $z = x + iy$):

   a) $\cos(iz) = \cosh(z)$;
   b) $\operatorname{sen}(iz) = i\operatorname{senh} z$;
   c) $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$;
   d) $|\cos z|^2 + |\operatorname{sen} z|^2 = \cosh(2y)$;
   e) $\cosh^2(z) - \operatorname{senh}^2(z) = 1$;
   f) $\cosh^2 z + \operatorname{senh}^2 z = \cosh(2z)$;
   g) $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cdot \cos w + \cos z \cdot \operatorname{sen} w$;
   h) $\cos(z+w) = \cos z \cdot \cos w - \operatorname{sen} z \cdot \operatorname{sen} w$.

3. Calcule o valor principal (i.e., considerando o ramo principal da função $\log z$, ou seja, $\log z = \log|z| + i\theta$, com $\theta \in]-\pi,\pi]$) de:

   a) $\log(-e)$ b) $\log(-i)$ c) $\log(1-i)$ d) 2^{-i} e) $i^{\,i}$ f) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1-i}$

4. Determine todas as soluções das seguintes equações:

   a) $e^z = e$ b) $e^z = -1$ c) $\log z = 1 + 2\pi i$ d) $e^{iz} + e^{-iz} + 2 = 0$
   e) $\operatorname{sen}(z) = 10$ f) $(z^4 - 1)\operatorname{sen}(\pi z) = 0$ g) $\cosh^2 z = 0$ h) $\operatorname{sen}^2(1/z) = 0$

5. Estabeleça a seguinte fórmula

$$\arctan z = \frac{i}{2}\log\left(\frac{i+z}{i-z}\right).$$

   Sugestão: Use a fórmula de Euler na relação $\tan z = w$ e determine e^z em função de z.

6. Determine a parte real e a parte imaginária de cada uma das funções:

   a) $\overline{z} + iz^2$ b) $i - z^3$ c) $\overline{z}/z$ d) $\operatorname{sen}(z)$ b) $\tan(z)$

7. Esboçe a imagem pela aplicação f do conjunto A indicado:

   a) $f(z) = z^2$, $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{6}\}$
   b) $f(z) = z^2$, $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$
   c) $f(z) = \log z$ (ramo principal), $A = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < e,\ \frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg} z < \frac{7\pi}{4}\}$
   d) $f(z) = (z-i)^{-1}$, $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| \leq 2\}$
   e) $f(z) = (z-i)^{-1}$, $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1,\ z \neq i\}$