

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Problemas propostos para as aulas práticas

Semana 13 - 6 a 10 de Dezembro de 2010

1. Determine a solução da equação diferencial

$$y'' - 4y' + 3y = (1 + e^{-x})^{-1}$$

que verifica as condições iniciais $y(0) = y'(0) = 1$

2. Considere a equação

$$y''' - 4y'' + 5y' = 0$$

(i) Determine a sua solução geral.

(ii) Determine para que condições iniciais em $t = 0$ é que os problemas de valor inicial correspondentes têm soluções convergentes quando $t \rightarrow \infty$.

3. Para que valores de $c \in \mathbb{R}$ é que a equação

$$y'' - 2cy' + y = 0$$

admite uma solução periódica, que não seja identicamente nula?

4. Considere a equação diferencial

$$y'' + \frac{t}{1-t}y' + \frac{1}{t-1}y = 1 - \frac{1}{t}.$$

(a) Determine soluções da equação homogénea associada da forma $y(t) = t^k$ e da forma $y(t) = e^{\lambda t}$. Escreva a solução geral dessa equação homogénea.

(b) Ache a solução do problema de valor inicial $y(2) = 1$, $y'(2) = -1$.

5. Determine os valores de λ para os quais os seguintes problemas de valor de fronteira têm soluções não triviais:

(a) $y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0$; $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

(b) $y'' + \lambda y = 0$; $y(0) = y(2\pi)$, $y'(0) = y'(2\pi)$.

6. a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geq 0$ e para $x \in [0, 1]$ de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u & \text{se } x \in]0, 1[\\ u(0, t) = 0 & \text{se } t > 0 \\ u(1, t) = \text{sen } 1 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x, 0) = 3 \operatorname{sen}(2\pi x) - 7 \operatorname{sen}(4\pi x) + \operatorname{sen}(x).$$

7. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad x \in (0, \pi), \quad \text{com} \quad \begin{cases} u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = \operatorname{sen}(x) - 2 \operatorname{sen}(5x). \end{cases}$$

8. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = u_{xx} - u, \quad x \in (0, L), \quad \text{com} \quad \begin{cases} u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = \cos(3\pi x/L). \end{cases}$$

9. Calcule a série de Fourier da função $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ +1 & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

10. Determine a série de Fourier da função $g(x) = L - |x|$, no intervalo $[-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

11. Determine a série de Fourier da função $h(x) = x^2$, no intervalo $x \in [-L, L]$. Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

12. Calcule a série de Fourier da onda sinusoidal rectificada, isto é, de

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } \operatorname{sen} x > 0 \\ 0 & \text{se } \operatorname{sen} x \leq 0 \end{cases}$$

13. Desenvolva a função definida no intervalo $[0, 1]$ por $f(x) = 1$ numa série de senos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

14. Considere a função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$. Determine:

- (a) a série de Fourier associada a f ;
- (b) a série de senos associada a f ;
- (c) a série de cossenos associada a f .