Análise Complexa e Equações Diferenciais

Problemas propostos para as aulas práticas

Semana 12 - 29 de Novembro a 3 de Dezembro de 2010

1. Determine a solução geral do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} x' = 14x - 10y + 1 \\ y' = 10x - 2y + 2 \end{cases}$$

Sugestão: Determine primeiro uma solução particular constante.

2. Considere a seguinte matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule $e^{\mathbf{A}t}$.

(b) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{t}) \\ \\ \mathbf{y}(1) = (1, 1, 1)^T \end{cases}$$

onde $\mathbf{h}(\mathbf{t}) = (0, 2e^t, e^t)^T$.

3. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \\ \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \end{cases}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(i) Determine a solução geral da equação homogénea.

(ii) Sendo $\mathbf{y}(t) = [y_1(t)\ y_2(t)\ y_3(t)\ y_4(t)]^T$ a solução do problema não homogéneo, determine $y_2(3)$.

4. (i) Determine a solução do sistema linear

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

que satisfaz a condição inicial $x(0) = y(0) + 1 = 1$.

(ii) Considerando agora o sistema

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \\ z' = y - (\operatorname{sen} t)z \end{cases}$$

utilize a alínea anterior para determinar a solução que verifica a condição inicial $x(0) = y(0) + 1 = z(0) = 1$.

5. Determine a solução geral de cada uma das equações:

a) $y''' - 2y'' = 0$

b) $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$

6. Resolva os problemas de valor inicial:

a) $y''' - y'' + y' - y = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = -y''(0) = 1$

b) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = 1$ e $y''(0) = 4$

c) $y''' + 5y'' + y' = 0$ verificando $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

7. Determine a solução geral de cada uma das equações:

a) $y'' - 2y' - 3y = \cos t$, b) $y'' - 2y' + y = te^t$,

c) $y^{(4)} + y = t + e^{2t}\operatorname{sen} t$, d) $y^{(3)} - 2y^{(2)} = t$,

e) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^t}{t}$, f) $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^t)$.

8. Determine a solução da equação linear:

$$y''' - 2y'' + y' - 2 = b(t)$$

que verifica as condições iniciais

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad , \quad y''(0) = 1$$

quando:

(i) $b(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

(ii) $b(t) = t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

(iii) $b(t) = e^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.